Exercices de traitement numérique du signal

Gabriel Dauphin

1 Cours A : description d'un signal

1.1 Exercices d'application

Exercice 1 *(`29`) On considère un signal $s_1(t) = \cos(2\pi t)$ et $s_2(t) = |\cos(2\pi t)|$ où t représente le temps mesuré en secondes.*

1. *Représentez $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sur un graphique pour $t \in [0, 2]$.*
2. *Montrez que s_1 est périodique de période 1.*
3. *Proposez une formule à appliquer pour calculer la puissance du signal ?*
4. *Démontrez la formule trigonométrique $\cos^2(2\pi t) = \frac{1+\cos(4\pi t)}{2}$*
5. *Déduisez la puissance de s_1.*
6. *Montrez que s_2 est périodique de période $1/2$.*
7. *Proposez une formule à appliquer pour calculer la puissance, si possible la même que la précédente.*
8. *Montrez que la puissance de s_2 est la même que la puissance de s_1.*

1.2 Exercices pour approfondir

Exercice 2 *(`ex28`) On considère un robinet qui goutte. On considère que les gouttes d'eau sont de même taille et ont un volume de $1/20\mathrm{mL}$. Le débit de la moyen de la fuite est de $0.3\mathrm{L\dot{h}}^{-1}$. Expliquez comment ce phénomène peut se modéliser par :*

1. *un signal temps continu à valeurs réelles,*
2. *un signal temps continu à valeurs discrètes,*
3. *un signal temps discret à valeurs réelles,*
4. *un signal temps discret à valeurs discrètes.*

Pour chacun de ces modèles indiquez la période d'échantillonnage et la fréquence d'échantillonnage lorsque cela est nécessaire.

2 Cours B : échantillonnage d'un signal

2.1 Exercices d'application

2.2 Exercices pour approfondir

Exercice 3 *(`33`) Un filtre anti-repliement de spectre est souvent placé avant l'échantillonnage. A quoi est-ce que cela sert ? Ce filtre est souvent analogique, comment pourrait-on utiliser un filtre numérique à la place ?*

Exercice 4 *(`2`)*

On considère un signal $s_0 = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 3kHz$.

1. *Expliquez pourquoi l'énergie est infinie et calculez la puissance.*

2. *Tracez ce signal* s_0 *et le signal échantillonné à* $f_e = 18$*kHz, noté* s_{e1}*. Tracez la reconstruction de ce signal par un bloqueur d'ordre 0, noté* s_r*. Montrez que d'après le graphique il est possible que la puissance du signal échantillonné soit la même que le signal de départ. Que nous informe le critère de Nyquist ?*

3. *Montrez que le signal échantillonné est périodique.*

4. *Calculez la puissance du signal échantillonné, et celle du signal reconstruit.*

5. *Tracez* s_0 *et* s_e *quand* $f_e = 20$*kHz.*

6. *Donnez les conditions sur* f_0 *et* f_e *pour que* s_e *soit périodique et indiquez alors cette période.*

7. *Montrez que la puissance du signal échantillonné est conservée même quand le signal échantillonné n'est plus périodique.*

3 Cours C : Série de Fourier, transformée de Fourier

3.1 Exercices d'application

Exercice 5 *(*`30`*) On cherche à calculer la transformée de Fourier de* $s(t) = \sin^2(2\pi t) = \frac{1-\cos(4\pi t)}{2}$

1. *Représentez sur une même figure les fonctions* $\sin(2\pi t)$, $\cos(2\pi t)$, $-1/2\cos(4\pi t)$ *et* $\sin^2(2\pi t)$ *pour* $t \in [0,1]$.

2. *Ecrivez* $\sin(2\pi t)$ *comme une combinaison linéaire d'exponentielles complexes.*

3. *Montrez que* $\sin(2\pi t)$ *est périodique de période* 1*. Déduisez de ceci que la précédente formule est en fait la décomposition en série de Fourier de* $\sin(2\pi t)$ *en exponentielles complexes. Que valent les coefficients de la série Fourier de* $\sin(2\pi t)$ *?*

4. *Que vaut la transformée de Fourier de* $\sin(2\pi t)$ *?*

5. *En déduire la transformée de Fourier de* $\cos(2\pi t) = -\sin(2\pi(t-1/4))$ *? (la fonction cosinus est en avance d'un quart de période par rapport à la fonction sinus, elle est donc en opposition de phase avec la fonction sinus retardée d'un quart de période).*

6. *On observe que la fonction* $\cos(4\pi t)$ *est une contraction de la fonction* $\cos(2\pi t)$*, calculez sa transformée de Fourier ?*

7. *Quelle est la transformée de Fourier de la fonction constante* $t \mapsto 1$ *?*

8. *En utilisant la formule trigonométrique initiale, quelle est la transformée de Fourier de* $\sin^2(2\pi t)$ *?*

9. *Calculez la transformée de Fourier inverse de celle trouvée et retrouvez la formule trigonométrique initiale.*

Exercice 6 *(*`31`*) On cherche à déterminer la transformée de Fourier de*

$$s(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \mathbf{1}_{[0,2]}(t)$$

1. *Représentez le signal* s *pour* $t \in [0,2]$.

2. *Calculez la transformée de Fourier de* $s_1(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ *en utilisant la transformée de Fourier* $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi f t}dt$*, montrez qu'elle se met sous la forme de*

$$\hat{S}_1(f) = e^{-j\pi f}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

3. *Expliquez le fait que ce signal ne soit pas à valeurs réelles ?*

4. *Calculez la transformée de Fourier en $f = 0$ sans utiliser la formule plus haut.*

5. *Déduisez la transformée de Fourier de $s_2(t) = \mathbf{1}_{[0,2]}(t)$*

6. *Montrez que la transformée de Fourier de s se met sous la forme suivante :*

$$\hat{S}(f) = \frac{2 - e^{-2j\pi f} - e^{-4j\pi f}}{2j\pi f}$$

7. *Pour faciliter la représentation du module de la transformée de Fourier, il est en général souhaitable d'exprimer ce module sous la forme de produit de fonction simple. Après avoir remarqué que le numérateur s'annule en la fréquence nulle et effectué une factorisation, montrez que le module de la transformée de Fourier se met sous la forme suivante :*

$$|\hat{S}(f)| = \left|\frac{\sin \pi f}{\pi f}\right| \sqrt{5 + 4\cos 2\pi f}$$

8. *Dessinez à main levée le module de la transformée de Fourier pour $f \in [-4, 4]$.*

Exercice 7 *(6)*

Soit le signal défini par $x(t) = 0$ pour $t \notin]-1, 3[$, $x(t) = t$ pour $t \in]1, 2[$, $x(t) = 2 - t$ pour $t \in]0, 1[$ et $x(t) = 2$ pour $t \in]-1, 0[$ et aussi pour $t \in]2, 3[$.

1. *Calculez* $\arg(X(f))$.

2. *Calculez* $X(0)$.

3. *Calculez* $\int X(f)df$.

4. *Calculez* $\int |X(f)|^2 df$.

3.2 Exercices pour approfondir

Exercice 8 *(3)*

Donnez le développement en série de Fourier d'un pulse périodique de période T, de largeur τ et d'amplitude A, centré par rapport à l'origine. En posant $K = \frac{T}{\tau}$, donnez le nombre de raies du lobe principal et des lobes secondaires. Que se passe-t-il pour $K \to +\infty$ en maintenant A/K constant.

Exercice 9 *(4)*

Donnez la transformée de Fourier d'un pulse de largeur τ et d'amplitude A, centré autour de l'origine. Donnez la largeur du lobe principale et des lobes secondaires. Que se passe-t-il pour $\tau \to 0$ en maintenant $A\tau$ constant ?

Exercice 10 *(7)*

On considère un signal $s_0(t)$ sinusoïdal de fréquence $f_0 = 1\text{kHz}$ sur une durée T variant entre 0.5ms et 10ms. On cherche à visualiser comment évolue cette transformée de Fourier.

1. *Montrez que pour un signal quelconque $s(t)$, la transformée de Fourier de $s(t)\mathbf{1}_{[-T/2,T/2]}$ est*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f-\nu)\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu}d\nu$$

   Pour cela on peut exprimer $s(t)$ et $\mathbf{1}_{[-T/2,T/2]}$ en fonction de leur transformée de Fourier.

2. *Calculez alors le spectre de $s_0(t)$.*

3. *Représentez ce spectre, et commentez en terme du principe d'incertitude temps/fréquence.*

4. *La fenêtre de Hanning est définie par $s(t) = 0.5 + 0.5\cos(\frac{2\pi t}{T})$. Dessinez son spectre et commentez par rapport au spectre d'un signal créneau.*

5. *La fenêtre de Hamming est définie par $s(t) = 0.54 + 0.46\cos(\frac{2\pi t}{T})$, dessinez son spectre.*

4 Cours D : TFD, TFTD

4.1 Exercices d'application

Exercice 11 *(34)*

On considère le signal périodique $x_1[n]$ de motif $\{1, 0, 0, 1\}$ et le signal $x_2[n]$ périodique de motif $\{1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1\}$. Calculez les transformées de Fourier discrètes de ces deux signaux. Montrez comment les deux s'expriment en fonction d'un cosinus et comment la deuxième aurait pu se déduire de la première.

4.2 Exercices pour approfondir

Exercice 12 *(15)*

On considère le signal cosinus *tel que : $x[k] = cos(2\pi k/6)$, observé sur une durée limitée T=N.Te, avec comme fréquence d'échantillonnage $fe = 1\text{kHz}$. On considère 3 cas : N=6, N=12 et N=16.*

1. *Quelle est la fréquence du signal à temps discret s'il était défini sur une durée infinie ?*

2. *Calculez la TFD dans les deux premiers cas. On pourra s'aider de ce que sur l'ordinateur on trouve les résultats affichés sur la figure 1.*

3. *Le calcul de la TFD dans ces 3 configurations donne les résultats suivants montrés sur la figure 1. Mettez les bonnes échelles en fréquences pour les trois graphiques. Confrontez ce résultat à ceux trouvés précédemment. Expliquez pourquoi le troisième cas est différent.*

4. *Proposez une idée pour atténuer les distorsions dans le 3ème cas ?*

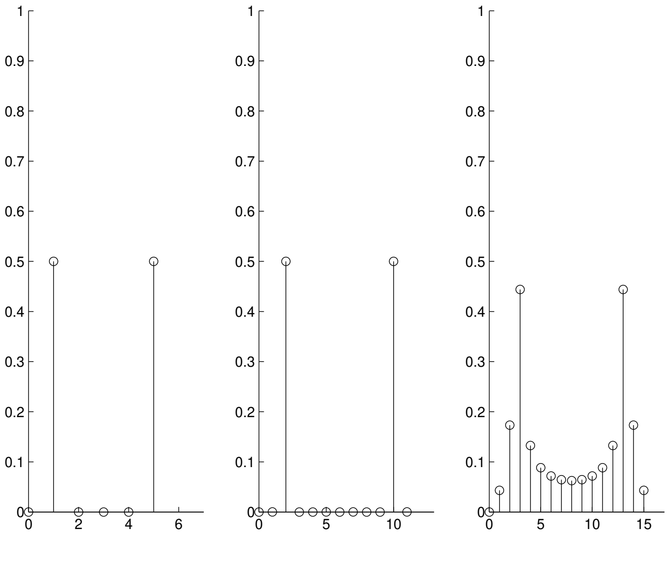

Figure 1: s0,se,sa

Exercice 13 *(`18`)*

Cet exercice a pour but d'introduire l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform). Pour simplier les écritures, on a pris une transformée de Fourier discrète (TFD) de taille $N = 8$. Le signal temps discret périodique est noté x_1, x_1, ... x_7 ; les coefficients de la transformée de Fourier discrète sont notées : X_1, ... X_7.

1. *En regroupant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, montrez que l'on peut calculer la suite X_k à partir de deux TFD de longueur 4. Donnez l'algorithme qui itère cette opération.*

2. *En comparant uniquement le nombre de multiplications et d'additions effectuées de l'algorithme précédent à celui d'un calcul direct, donnez le gain de calcul. Appliquez ce résultat à $N = 1024$.*

5 Cours E : Repliement de spectre

5.1 Exercices pour approfondir

6 Cours 1F : Filtres analogiques

6.1 Exercices d'applications

Exercice 14 *(`14`) On définit deux filtres. Le premier filtre est défini par sa réponse impulsionnelle : $h_n^a = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$. Le deuxième filtre est défini par sa fonction de transfert : $H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{2-z^{-1}}$.*

Pour les différents filtres ci-dessus, utilisés avec une fréquence d'échantillonnage de 1MHz, compléter les informations de manière à avoir :

1. *Le type de filtre (RII,RIF)*

2. *La stabilité*

3. *Le diagramme de pôle et de zéros*

4. *La réponse impulsionnelle*

5. *L'allure du module de la réponse fréquentielle.*

6. *Quelle est l'équation qui lie l'entrée et la sortie.*

Exercice 15 *(`5`)*

Calculez les transformées de Laplace de $\sin(2\pi f_0 t)$ et $\cos(2\pi f_0 t)$.

1. *En utilisant les propriétés de dérivation, reliant le sinus au cosinus, vérifiez que la TL du cosinus se calcule bien à partir de la TL du sinus.*

2. *En utilisant les propriétés d'intégration, reliant le cosinus au sinus, vérifiez que la TL du sinus se calcule bien à partir de la TL du cosinus.*

Exercice 16 *(`11`)*

1. *Calculez la transformée de Laplace de $s_1(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.*

2. *Calculez la transformée de Fourier de $s_1(t)$. Commentez les différences et ressemblances entre les deux formules.*

3. *$s_2(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ s'exprime en fonction de la dérivée de $s_1(t)$ en déduire la transformée de Laplace de $s_2(t)$. Commentez la pertinence physique de ce calcul.*

6.2 Exercices pour approfondir

Exercice 17 *(8)*

On considère un signal $y(t)$, temps continu et non-périodique dont l'énergie vaut 1. On donne une première définition de la durée utile du signal $\Delta T = 2\sqrt{\int t^2 y^2(t)\,dt}$ et la largeur utile du spectre $\Delta f = 2\sqrt{\int f^2 |\hat{Y}(f)|^2 df}$. On montre par une intégration par partie et en utilisant l'hypothèse que le signal est d'énergie finie qu'alors $\Delta T \Delta f \geq \frac{1}{\pi}$. En effet d'une part $\int yt\dot{y}dt = [0.5y^2 t]_{-\infty}^{+\infty} - 0.5\int y^2 dt = -0.5$ et d'autre part d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, ce terme est majoré en valeur absolue par $\sqrt{\int (ty)^2 dt}\sqrt{\int (\dot{y})^2 dt}$. La transformée de Fourier de $\dot{y}(t)$ est $-2j\pi f \hat{Y}(f)$, cela permet d'obtenir l'inégalité recherchée.

1. *Expliquez pourquoi le fait d'imposer que l'énergie vaut 1 est utile dans cette inégalité. Réécrire l'inégalité pour des signaux qui n'auraient pas une énergie égale à 1.*

2. *On définit la date moyenne d'un signal $t_0 = \sqrt{\int t y^2(t) dt}$, et on redéfinit la durée utile par*

   $\Delta T = 2\sqrt{\int (t-t_0)^2 y^2(t)\,dt}$. Expliquez l'intérêt de cette nouvelle définition et montrez que l'inégalité est encore valable avec cette nouvelle définition.

3. *On défini la fréquence moyenne d'un signal par $f_0 = \sqrt{\int f |\hat{Y}(f)|^2 df}$ et de même on définit un nouvelle définition de la largeur utile du spectre par $\Delta f = 2\sqrt{\int (f-f_0)^2 |\hat{Y}(f)|^2 df}$. Expliquez l'intérêt de cette définition et pourquoi l'inégalité reste valable.*

4. *Expliquez pourquoi l'inégalité respecte la façon dont la transformée d'un signal se déforme quand on dilate l'échelle de temps, sans utiliser les définitions issues des deux dernières questions.*

5. *On sait que la transformée d'une gaussienne est une gaussienne et que l'inégalité devient une égalité quand on l'applique à une gaussienne et que $\int e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, (résultat que l'on pourrait vérifier sous Excel). Comment s'écrit la réponse impulsionnelle d'un filtre gaussien qui a pour objectif de moyenner (et par suite dont la transformée de Fourier en la fréquence nulle est égale à 1). Quelle est la réponse fréquentielle de ce filtre (i.e. la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle) ?*

6. *Montrez qu'un signal créneau respecte cette inégalité.*

7. *Donnez la durée utile de la réponse impulsionnelle en fonction d'un gabarit d'un passe-bas.*

Exercice 18 *(9)*

On considère un filtre de transformée de Laplace $H(p) = a\frac{p+1}{p+b}$, avec a, b dans $\mathbb{R}$.

1. *Pour quelles valeurs de b ce filtre est-il stable ?*

2. *Calculez la réponse fréquentielle de ce filtre.*

3. *Donnez la relation entre a et b pour que $\hat{H}(0) = 1$. A quoi sert cette relation ?*

4. *Représentez le module de la réponse fréquentielle quand $b \in]0,1[$ puis quand $b \in]1,+\infty[$. Commentez.*

5. *Calculez la réponse impulsionnelle de ce filtre. Commentez sur la stabilité du filtre.*

6. *Reprendre les deux dernières questions en considérant une nouvelle échelle de temps $t' = 2t$ appliquée à un nouveau filtre $H(p) = \frac{1}{p+1}$.*

La transformée de Laplace est définie par $H(p) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-pt} dt$

La transformée de Fourier est définie par $\hat{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$

7 Cours 2F : Filtres numériques, MA, AR, ARMA, Transformée en Z

7.1 Exercices d'application

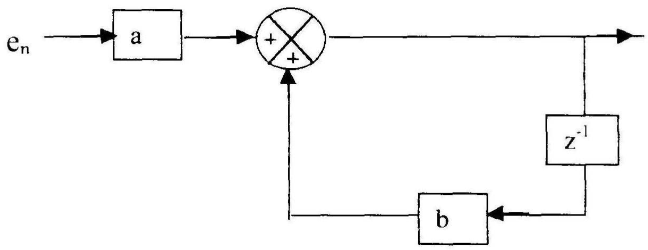

Figure 2: s0,se,sa (exercice 19, (12))

Exercice 19 *(12)*

On désigne par e_n et s_n respectivement les valeurs de l'entrée et de la sortie du filtre à l'instant nT_e défini dans la figure 2 (p. 7).

1. *Montrer que l'algorithme de ce filtre peut s'écrire : $s_n = ae_n + bs_{n-1}$, (a et b sont deux coefficients constants).*
2. *En déduire que la fonction de transfert en z de ce filtre peut s'écrire : $T(z) = \frac{a}{1-bz^{-1}}$.*

La transformée en Z s'écrit $TZ[h_n] = \sum_{n\geq 0} h_n z^{-n}$

Exercice 20 *(20)*

On considère le filtre de fonction de transfert $H^{\#}(z) = 1 + 3z^{-1} + 6z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4}$. Pourquoi ce filtre est à phase linéaire ? Montrez qu'il se comporte comme un filtre à retard, quel est ce retard ?

7.2 Exercices pour approfondir

Exercice 21 *(10)*

On considère le signal échantillonné à $f_e = 8\text{kHz}$, $x_n = \cos(2\pi n f_0 T_e)$, avec $f_0 = 1\text{kHz}$. Ce signal est transformé par un filtre de réponse impulsionnelle $h_n = \frac{1}{2}\delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-2}$.

1. *Exprimez $y_n = h_n \star x_n$ en fonction de x_n.*
2. *Représentez x_n et x_{n-2} sur un premier graphique puis y_n sur un deuxième graphique. L'intervalle de temps considéré est $[0, 2\text{ms}]$. D'après le graphique, quand $|y_n|$ est maximal et quand $|y_n|$ est minimal que peut-on dire de x_n, et de x_{n-1}. Pourquoi on sait déjà que y_n est périodique ? Pourquoi sait-on que y_n est une sinusoïde de fréquence f_0 ?*
3. *Calculez y_n, on pourra utiliser les valeurs numériques de f_0 et f_e.*
4. *En utilisant de f_0 et f_e, les valeurs numériques de f_0 et f_e, calculez les transformée de Fourier x_n, h_n. Calculez le module et l'argument de la réponse fréquentielle. Représentez graphiquement la réponse fréquentielle, s'agit-il d'un passe-haut, d'un passe-bas ?*
5. *On pose $\tau = -\frac{\arg(\hat{H}(f_0))}{2\pi f_0}$. Expliquez ce qu'est cette quantité ? Montrez que $y_n = x_{n-\frac{\tau}{T_e}} |\hat{H}(f_0)|$.*

6. *On pose* $x'_n = x_n \mathbf{1}_{n\geq 0}$. *Exprimez* y'_n *en fonction de* y_n. *Montrez qu'on n'a plus* $y'_n = x'_{n-\frac{\tau}{T_e}} |\hat{H}(f_0)|$. *Expliquez pourquoi* x'_n *et* y'_n *est une modélisation plus réaliste. Représentez graphiquement* x'_n *et* y'_n.

Exercice 22 *(*`32`*)*
On considère le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{1}{1-2/3z^{-1}}$. *On considère que le signal d'entrée est échantillonné à* 1Hz *à valeurs dans* $[0, 10]$ *et quantifié sur* 11 *niveaux suivant la régle de la partie entière.*

1. *Représentez le filtre sous forme d'un diagramme avec des retards.*

2. *On suppose les signaux ne sont pas quantifiés et que l'entrée est le signal constant égale à* 1*, que vaut la sortie ?*

3. *On suppose que maintenant les signaux sont quantifiés, en particulier que la sortie de chaque module est aussi un signal quantifié correspondant à un des* 11 *codes. Expliquez comment l'opérateur* $\times 2/3$ *transforme chaque code en un code.*

4. *On suppose que la sortie est au départ à* 0 *et que l'entrée est constante et vaut* 1*, que les signaux sont quantifiés tout au long du parcours, que vaut la sortie ?*

5. *On suppose que la sortie est au départ à* 2 *et que l'entrée est constante et vaut* 1*, que les signaux sont quantifiés tout au long du parcours, que vaut la sortie ?*

6. *On suppose que la sortie est au départ à* 6 *et que l'entrée est constante et vaut* 1*, que les signaux sont quantifiés tout au long du parcours, que vaut la sortie ?*

7. *On considère maintenant que des signaux non-quantifiés. Que vaut la réponse impulsionnelle du filtre ?*

8. *On considère de nouveaux les signaux quantifiés, montrez que l'on peut considérer que la réponse impulsionnelle est en fait nulle à partir d'un certain instant parce qu'elle n'aura pas un effet différent après quantification. Comment peut-on tronquer la réponse impulsionnelle ?*

9. *Représentez le diagramme correspondant à la réponse impulsionnelle tronquée.*

8 Cours G : Synthèse de filtre MA, gabarit, fenêtre, invariant impulsionnel

8.1 Exercices d'applications

Exercice 23 *(*`19`*)*
On cherche à synthétiser avec un filtre à réponse impulsionnelle finie un passe-haut de fréquence de coupure $f_c = f_e/6$*, avec* $f_e = 1\text{kHz}$*, à l'aide de la fenêtre triangulaire.*

1. *On considère une suite temps discret* h_n^1 *dont la transformée de Fourier est périodique de période* f_e *et égale à* $\mathbf{1}_{[-f_c,f_c]}$ *sur l'intervalle* $[-f_e/2, f_e/2]$. *Quelle transformée de Fourier utiliser pour calculer* h_n^a *?*

2. *On sait que la transformée de Fourier de* $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ *est* $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$. *Montrez qu'alors la transformée de Fourier inverse de* $\mathbf{1}_{[-f_c,f_c]}(f)$ *est* $\frac{\sin(\pi t f_e/3)}{\pi t}$ *?*

3. *Déduisez que* $h_n^a = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}$

4. *On note* h_n^b *la suite dont la transformée de Fourier vaut* $\mathbf{1}_{[-f_e/2,-f_c]} + \mathbf{1}_{[f_c,f_e/2]}$ *au sein de l'intervalle* $[-f_e/2, f_e/2]$. *Que vaut* h_n^b.

5. *On souhaite maintenant un filtre causal avec une réponse impulsionnelle* h_n^c *causale sur sept termes (i.e. ailleurs que sur ces sept termes la réponse impulsionnelle est nulle). Que vaut* h_n^c *?*

6. *On utilise maintenant une fenêtre triangulaire, que vaut le filtre* h_n^d *ainsi modifié ?*

7. *Pourquoi le filtre obtenu est-il à phase linéaire ?*

8. *Les modules et les phases des filtres recherchés sont représentés sur la figure 3 (p. 9), précisez quelle courbe correspond à quel filtre.*

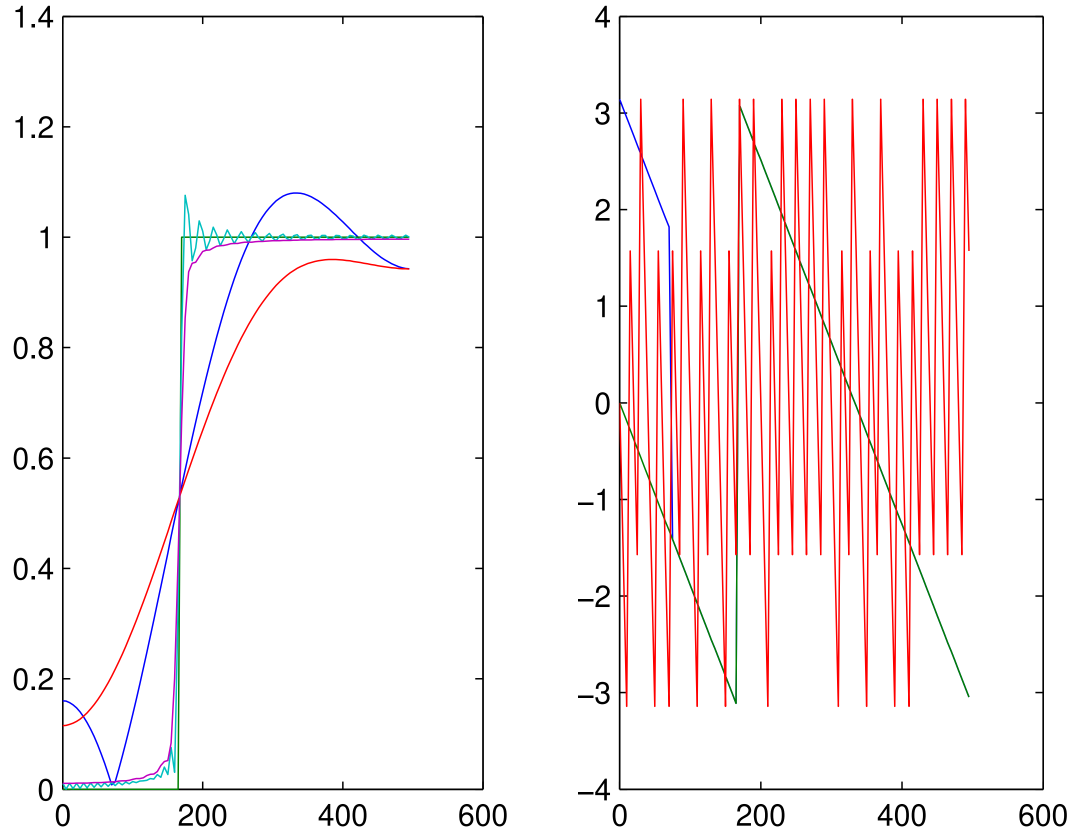

Figure 3: Module et phase des réponse fréquentielle des différents filtres pour deux troncatures à $N = 6$ et $N = 100$, avec et sans application de la fenêtre triangulaire, (exercice 23)

9 Exercice pour approfondir

Exercice 24 *(21)*

On cherche à synthétiser un filtre numérique gaussien. La figure 4 montre à gauche la réponse impulsionnelle d'un filtre gaussien d'écart-type $\sigma = 0.01\mathrm{s}$ *et à droite sa transformée de Fourier. La figure montre aussi à gauche avec des + les coefficients d'un filtre numérique gaussien obtenu par invariant impulsionnel et avec une fréquence d'échantillonnage de* $127\mathrm{Hz}$ *et qui a pratiquement le même spectre (en module). Dans toutes les formules qui suivent le fait de ne pas préciser les bornes de l'intégrale signifie qu'elle est porte sur l'intervalle* $]-\infty,\infty[$.

1. *On cherche d'abord à déterminer les caractéristiques d'un filtre analogique gaussien souhaitable. On suppose qu'il est de la forme* $h(t) = ae^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ *et que sa réponse fréquentielle est de la forme* $\hat{H}(f) = be^{-cf^2}$. *Expliquez pourquoi* $\hat{H}(0) = 1 = \int h(t)dt$ *et pourquoi* $h(0) = \int \hat{H}(f)df$.

2. *Sachant que* $\int e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\sigma$, *Montrez que* $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, $b = 1$ *et* $c = 2\pi^2\sigma^2$.

3. *On définit la durée utile de la réponse impulsionnelle par* $\Delta t = 2\frac{\sqrt{\int t^2 h^2(t)\,dt}}{\sqrt{\int h^2(t)\,dt}}$ *et la largeur utile du spectre* $\Delta f = 2\frac{\sqrt{\int f^2 |\hat{H}|^2(f)\,dt}}{\sqrt{\int |\hat{H}|^2(t)\,dt}}$ *En faisant l'analogie avec les probabilités, calculez* Δt *et* Δf*. L'inégalité associé à l'incertitude temps-fréquence est avec ces définitions justement* $\Delta t \Delta f \geq 1/\pi$*. Montrez qu'on a ici l'égalité et que* $\Delta t = \sqrt{2}\sigma$ *et* $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma}$*.*

4. *Pour générer le filtre temps discret, on utilise ici l'invariant impulsionnel qui consiste à échantillonner la réponse impulsionnelle, à tronquer puis à décaler pour rendre causal. Que vaut la réponse impulsionnelle du filtre* $h_n^{\#}$ *obtenu ?*

5. *On suppose dans un premier temps qu'on considère un grand nombre de termes, quelle est la relation entre la réponse fréquentielle du filtre numérique et la réponse fréquentielle du filtre d'origine.*

6. *Sachant que dans une gaussienne d'écart-type* σ*,* $95/100$ *de la surface est entre* -2σ *et* 2σ*, que proposez-vous pour choisir la fréquence d'échantillonnage ? Que se passe-t-il pour* $f_e = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma}$ *?*

7. *Comment peut-on choisir le nombre de terme en fonction de la fréquence d'échantillonnage et en fonction de* σ *?*

8. *Montrez que les conditions pour choisir* N *et* f_e *dans les deux dernières questions sont bien respectées dans la figure 4.*

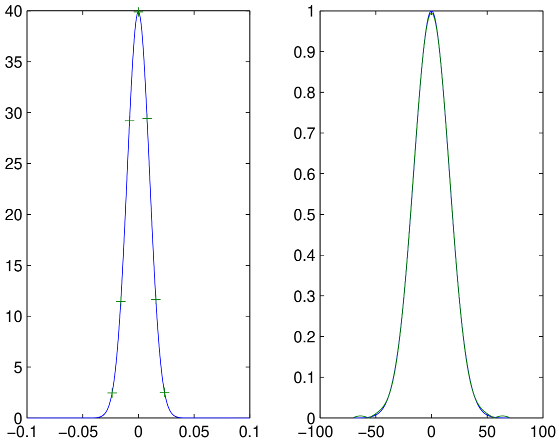

Figure 4: A gauche : réponse impulsionnelle gaussienne et les 7 coefficients du filtre numérique gaussien ($\sigma = 10^{-2}$s et $f_e = 127$Hz). A droite : réponse fréquentielle des filtres gaussiens temps continu et temps discret. réponse fréquentielle en module et en phase du filtre étudié ainsi que du filtre à retard correspondant (exercice 24, (21))

10 Cours H : Synthèse de filtre AR, gabarit, transformées bilinéaires

10.1 Exercices d'applications

Exercice 25 *(22)*

On cherche à synthétiser avec un filtre numérique de Butterworth un passe-bas de fréquence de coupure $f_c^{\#} = f_e/6$*, avec* $f_e = 1$kHz *à l'ordre* 3*.*

1. *On cherche le gabarit que devrait avoir le filtre analogique pour qu'après application de la transformée bilinéaire le filtre numérique obtenu soit celui souhaité. L'ingénieur A dit que les fréquences sont transformées par une application non-linéaire qui est une tangeante, il propose $f^{\#} = a\tan(bf)$, où f désigne les fréquences du filtre analogique et $f^{\#}$ désigne les fréquences du filtre numérique ; quand pour deux fréquences f et $f^{\#}$ cette relation est vérifiée alors il y a égalité entre $\hat{H}(f)$ et $\hat{H}^{\#}(f)$. Pourquoi cette relation, telle qu'elle est proposée par l'ingénieur A n'est pas pertinente ? L'ingénieur B propose une autre relation $f = a\tan(bf^{\#})$. Proposez un raisonnement permettant de fixer b ; puis un deuxième raisonnement permettant de fixer a en fonction de b en utilisant le fait qu'à basse fréquence on souhaite que le filtre analogique et le filtre numérique ait le même comportement. Quel est alors le gabarit ?*

2. *Sachant que les fonctions de transfert des filtres de Butterworth vérifient $H(p)H(-p) = \frac{1}{(-1)^n p^{2n}+1}$, montrez que le changement de variable $p = \frac{p'}{2\pi f_0}$ permet d'approcher le gabarit recherché, calculez pour cela la réponse fréquentielle. Comment choisir alors f_0 ?*

3. *La table des filtres de Butterworth indique que pour $n = 3$, $H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$. D'après la façon de construire ces filtres et par suite sans calcul, donnez les pôles de ces filtres.*

4. *Calculez H^a la fonction de transfert du filtre analogique qui s'approche du gabarit, ainsi que la réponse fréquentielle.*

5. *Calculez H^b la fonction de transfert du filtre numérique recherché (fonction de transfert et réponse fréquentielle). Les calculs sont simplifiés en montrant d'abord que $p = \sqrt{3}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.*

$$H^b(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{(5\sqrt{3}+7) - (7\sqrt{3}+3)z^{-1} + (7\sqrt{3}-3)z^{-2} + (-5\sqrt{3}+7)z^{-3}}$$

6. *Sans utiliser ce dernier résultat, calculez la réponse fréquentielle du filtre numérique recherché.*

Exercice 26 *(13)*

On cherche à comparer la réponse impulsionnelle d'une filtre analogique avec la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique. La transformée de Laplace du filtre analogique étudié est $H(p) = \frac{p}{p+1}$

1. *Pourquoi H est-il stable ?*

2. *On considère que la fréquence d'échantillonnage est de $fe = 1\text{Hz}$. Montrez la transformée bilinéaire H^d de H peut se mettre sous la forme $H^d(z) = a + \frac{b}{1-cz^{-1}}$, avec $a = 2$, $b = -4/3$, $c = 1/3$.*

3. *Calculez la réponse impulsionnelle.*

4. *Du fait de l'utilisation de la transformée bilinéaire, il existe une relation entre la réponse fréquentielle du filtre analogique et la réponse fréquentielle du filtre numérique. Quelle est cette relation, redémontrez cette relation et en déduire le module de la réponse fréquentielle du filtre numérique ? Représentez le module de la réponse fréquentielle sur $[-2f_e, 2f_e]$.*

Exercice 27 *(16)*

On considère un filtre de transformée de Laplace $H(p) = \frac{1}{p+1}$. L'unité de temps choisie est la seconde.

1. *En quoi cette précision sur l'unité donne un sens plus précis à ce qui précède ?*

2. *Montrez que la relation entrée-sortie associée est : $y' + y = u$.*

3. *Ce filtre est-il stable ?*

4. *On définit un filtre linéaire numérique par sa fonct1ion de transfert $H^{\#}(z) = H(\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$, où T_e est la période d'échantillonnage égale à 1ms. Il s'agit de la transformée bilinéaire. Quelle est la relation entre la réponse fréquentielle de ce filre numérique et celle du filtre analogique précédent ?*

5. *Calculez le filtre numérique associé.*

6. *Ce filtre est-il stable ?*

10.2 Exercices pour approfondir

Exercice 28 *(23)*

On cherche à construire un filtre numérique passe-bande de fréquences de coupures $f_e/8$ et $3f_e/8$, avec une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 1\text{kHz}$ en utilisant les filtres de Butterworth à l'ordre $1, 2$ ou 3. Le gabarit et les filtre numériques synthétisés sont représentés à droite de la figure 5 (p. 12).

1. *Dessinez le gabarit du filtre anal ogique que l'on recherche. On pourra utiliser que $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et que $\tan(3\pi/8) = \sqrt{2} + 1$. On pose $f_1 = \frac{f_e(\sqrt{2}-1)}{\pi}$ et $f_2 = \frac{f_e(\sqrt{2}+1)}{\pi}$*

2. *On propose le changement de variable*

$$p = \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{f_2 - f_1}\left(\frac{p'}{2\pi\sqrt{f_1 f_2}} + \frac{2\pi\sqrt{f_1 f_2}}{p'}\right)$$

   A quoi doit servir un tel changement de variable ? Quel est le changement de variable en fréquence correspondant ? Montrez que si $f' = \sqrt{f_1 f_2}$ alors f vaut 0. Montrez que si $f' = f_1$ ou si $f' = f_2$ alors $|f| = \frac{1}{2\pi}$. Montrez que si $f' > f_2$ ou si $f' < f_1$ alors $|f| > \frac{1}{2\pi}$. Montrez pourquoi un tel changement de variable permet de transformer le gabarit d'un filtre de Butterworth en le gabarit du filtre analogique recherché.

3. *Montrez que le filtre numérique s'obtient avec le changement de variable $p = \frac{1+z^{-2}}{1-z^{-2}}$.*

4. *Sur les tables des filtres de Butterworth, on a $H(p) = \frac{1}{p+1}$, $H(p) = \frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$ et $H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$. En déduire trois filtres numériques qui répondent au problème. Le troisième est $H(z) = \frac{1-3z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6}}{6+2z^{-4}}$.*

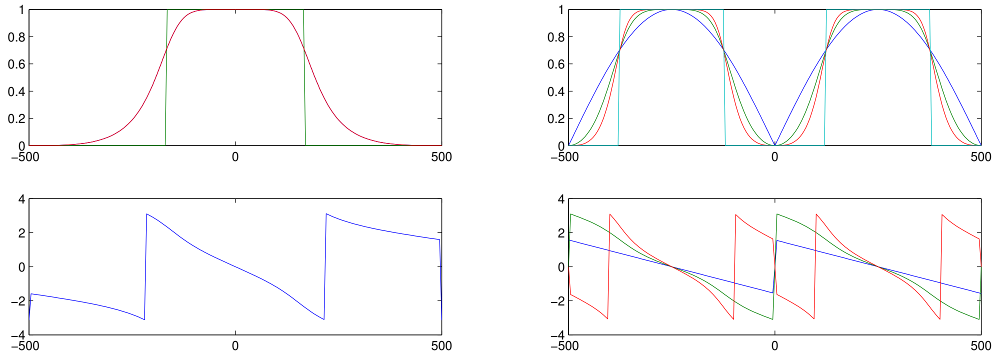

Figure 5: A gauche : gabarit d'un passe-bas et filtre de Butterworth analogique. A droite : gabarit du passe-bande et filtres numériques synthétisés en utilisant les filtres de Butterworth à l'ordre $1, 2$ et 3 (exercice 28, (23))

Exercice 29 *(24)*

On cherche à déterminer l'ordre minimal du filtre de Butterworth qui permet de respecter le gabarit d'un filtre passe-bas. On utilise pour le gain une échelle en dB inversée définie par $\alpha = -10\log_{10}\left(|\hat{H}(f)|^2\right)$. Cette échelle est commune aux filtres analogiques et numériques. L'objectif porte sur le filtre numérique à synthétiser, il est que $\alpha \in [0, \alpha_1]$ en $f^\# \leq f_1^\#$ et $\alpha > \alpha_2$ en $f^\# \geq f_2^\#$.

1. *Pourquoi souhaite-t-on que le filtre numérique synthétisé vérifie $\alpha = 0$ en la fréquence nulle ? Pourquoi $\alpha \geq 0$?*

2. *Déterminez le gabarit du filtre analogique correspondant, exprimez f_1 et f_2 en fonction de $f_1^\#$ et $f_2^\#$.*

3. *On considère le changement de variable* $p = \frac{p'}{2\pi f_0}$*, montrez qu'alors les filtres de Butterworth se transforment en des filtres de réponses fréquentielles* $|\hat{H}'(f')|^2 = \frac{1}{\left(\frac{f'}{f_0}\right)^{2n}+1}$*. Pour cette question et les suivantes, on note* p *et* f *pour les variables associées aux filtres de Butterworth définis dans les tables et on note* p' *et* f' *pour les variables associés aux filtres de Butterworth transformés.*

4. *Montrez que si* $f' = f_0$ *alors* $\alpha = 3$*. Les réponses fréquentielles dépendent de* f_0 *et de* n*, montrez comment* f_0 *et* n *modifient ces réponses fréquentielles.*

5. *Montrez que*

$$n = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}\left(\frac{10^{\frac{\alpha_2}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_1}{10}}-1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}$$

6. *Montrez que par substitution on peut ensuite trouver* f_0 *:*

$$f_0 = f_1(10^{\frac{\alpha_1}{10}} - 1)^{-1/2n}$$

7. *Montrez que l'on peut exprimer l'ordre du filtre directement à partir des fréquences du gabarit du filtre numérique.*

$$n = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}\left(\frac{10^{\frac{\alpha_2}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_2}{10}}-1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{\tan(f_2^{\#}\pi/f_e)}{\tan(f_1^{\#}\pi/f_e)}\right)}$$

11 Cours I : Intercorrélation, Autocorrélation, Détection

Exercice 30 *(25)*

Le radar étudié émet à la fréquence de $f_0 = 30\text{GHz}$*. On considère une cible à une distance de* $r = 5\text{km}$ *et s'éloignant à une vitesse de* $v = 1\text{kmh}^{-1}$*. Le pulse que l'on envoie est une sinusoïde de fréquence* f_0 *et a une durée* $T = 1.5\text{ns}$*.*

1. *Montrez que le signal retransmis est retardé de* $\Delta t = 33\mu\text{s}$*. Montrez que la variation de fréquence provoquée par l'effet Doppler est de* 55Hz *? En déduire que le retard ne varie absolument pas sur* $T = 1.5\text{ns}$ *et qu'en particulier on peut faire comme si l'écho associé au pulse était provoqué par une cible fixe.*

2. *D'après le critère de Shannon-Nyquist, quelle doit être la durée maximale du PRT (Pulse Repetition Time) pour que la vitesse soit mesurée sans ambiguïté ?*

3. *Le signal émis est* $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$*. Montrez que sa transformée de Fourier est :*

$$X(f) = \frac{1}{2j}\frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\pi(f-f_0)}e^{-j\pi(f-f_0)T} - \frac{1}{2j}\frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\pi(f+f_0)}e^{-j\pi(f+f_0)T}$$

Expliquez pourquoi ce spectre est très proche de la transformée de Fourier d'une sinusoïde définie sur une durée infinie. Pour faire ce calcul, on utilise le fait que la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ *est* $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$*, on retarde ce signal de* $-1/2$ *puis on dilate en temps d'un facteur* T *et enfin on le multiplie par* $\sin(2\pi f_0 t)$*. Le calcul de la transformée de Fourier de ce sinus est une somme de deux diracs, leur position et leur pondération peuvent être obtenus, soit en reconnaissant une série de Fourier, soit en exprimant la transformée de Fourier inverse. L'opération de multiplication de deux signaux en temps correspond à une convolution en fréquence des deux spectres associés.*

4. *Pour déterminer le retard de l'écho Δt, une méthode consiste à estimer l'intercorrélation entre le signal reçu et le signal émis. Pour étudier le bon fonctionnement de cette méthode, on calcule l'intercorrélation théorique. Le signal retransmis est supposé avoir eu une atténuation constante A et un retard Δt. Montrez que l'intercorrélation est :*

$$\gamma_{yx}(\tau) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0(t-\Delta t+\tau))\sin(2\pi f_0 t)\mathbf{1}_{[\Delta t-\tau,\Delta t-\tau+T]}(t)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)\,dt$$

5. *Expliquez pourquoi d'un point de vue technologique, on s'interdit de recherché un retard sur $[0,T]$, expliquez pourquoi de toute façon cette partie de l'intercorrélation ne nous intéresse pas.*

6. *Montrez que l'intercorrélation est nulle pour $\tau < \Delta t - T$ et pour $\tau > \Delta t + T$.*

7. *Dans l'expresson de l'intercorrélation, on pourrait croire que même un objet très loin pourrait être détecté, ceci est pourtant contraire à la notion d'ambiguïté spatiale. Comment expliquer cela ?*

8. *En utilisant le changement de variable $t' = t - \Delta t + \tau$, montrez que $\gamma_{yx}(\tau) = \gamma_{yx}(2\Delta t - \tau)$. Qu'est-ce que cela montre sur l'intercorrélation ?*

9. *En utilisant $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$ et en négligeant un des deux termes (après justification), montrez que pour τ proche de Δt :*

$$\gamma_{yx}(\tau) = \frac{A}{2}(T - |\tau-\Delta t|)\cos(2\pi f_0(\Delta t-\tau))\mathbf{1}_{[-T,T]}(\tau-\Delta t)$$

   Cette intercorrélation est représentée en haut de la figure 6 (p. 15).

10. *Calculez la transformée de Fourier de l'intercorrélation à partir des transformées de Fourier des signaux émis et reçus. Après avoir négligé les termes croisés (et après justifications) montrez que*

$$\Gamma_{yx}(f) = \frac{A}{4}\frac{\sin^2(\pi(f-f_0)T)}{(\pi(f-f_0))^2}e^{-j2\pi f\Delta t} + \frac{A}{4}\frac{\sin^2(\pi(f+f_0)T)}{(\pi(f+f_0))^2}e^{-j2\pi f\Delta t}$$

   Le module de ce spectre est représenté en bas de la figure 6.

11. *Montrez que l'on peut retrouver le résultat précédent de l'intercorrélation. Pour cela on pourra utiliser le fait que la transformée de Fourier de la fonction triangle $|t|\mathbf{1}_{[-T,T]}$ est $\frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2}$. Ce résultat peut se montrer en observant que $t\mathbf{1}_{[0,T]}$ est l'intégrale de $\mathbf{1}_{[0,T]}$ et est donc la transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{j2\pi f}$TF$[\mathbf{1}_{[0,T]}]$. On en déduit la transformée de Fourier de $-t\mathbf{1}_{[-T,0]}$. Le résultat s'obtient en additionnant ces deux résultats.*

12 Cours J : Temps fréquences, multi-résolution, filtre temps-variant, ondelette

Exercice 31 *(27)*

On considère un signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\mathbf{1}_{[0,T_1]}(t) + \cos(2\pi f_1 t)\mathbf{1}_{]!T_1,T_2]}(t)$. que l'on discrétise à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 100\text{Hz}$, avec $T_1 = 5\text{s}$ et $T_2 = 10\text{s}$. La transformée de Fourier n'est pas un outil adapté et on utilise ici la transformée de Fourier locale définie à temps continu par $\hat{X}(\tau,f) = \int x(t)w(t-\tau)e^{-j2\pi ft}\,dt$ et à temps discret par $\hat{X}(n_0,f) = \sum_n x_n w_{n-n_0} e^{-j2\pi f n T_e}$ où w est une fenêtre centrée en l'instant nul.

Pour simplifier, on utilisera ici pour w_n une fenêtre rectangulaire. Le résultat simulé sous Matlab est sur la figure 7 (p. 16) avec en abscisse le temps et en ordonnée la fréquence. Les points blancs correspondent à des valeurs élevées de $|\hat{X}(n_0,f)|$, tandis que les points noirs indiquent des valeurs faibles de $|\hat{X}(n_0,f)|$. La figure 8 (p. 17) est obtenue en faisant une coupe de la figure 7 suivant la ligne verticale passant par le centre de l'image. L'objectif est de déterminer à partir de ces graphiques, les fréquences f_0 et f_1 et la taille de la fenêtre utilisée. La figure 8 est très sensible à la position en temps et pour des raisons de symétrie une fenêtre de taille paire a été utilisée alors que pour réaliser la figure 7 et pour des raisons de simplicité c'est une fenêtre impaire qui a été utilisée.

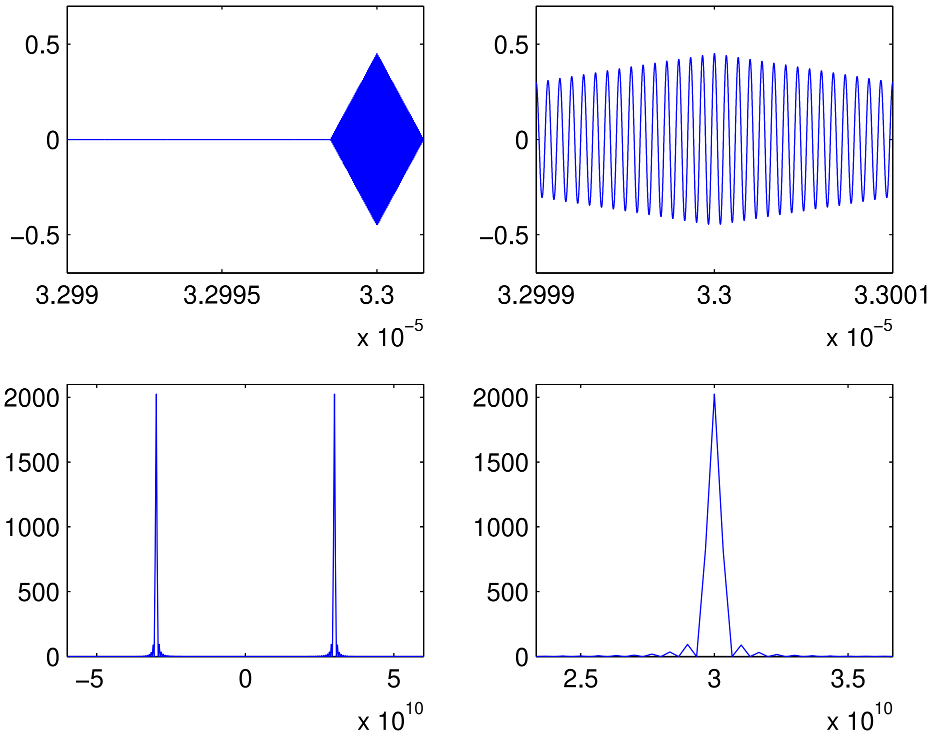

Figure 6: En haut : intercorrélation. En bas : Transformée de Fourier de l'intercorrélation. Exercice 30, (25)

En utilisant les transformations usuelles (retard et produit), on calcule les transformées de Fourier des signaux suivants.

$$y_{t_1,t_2,f_0,\phi}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)\mathbf{1}_{[t_1,t_2]}(t) \tag{1}$$

$$\hat{Y}_{t_1,t_2,f_0,\phi}(f) = \frac{e^{j\phi}}{2}\frac{\sin\left(\pi(f-f_0)(t_2-t_1)\right)}{\pi(f-f_0)}e^{-j\pi(f-f_0)(t_1+t_2)} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\frac{\sin\left(\pi(f+f_0)(t_2-t_1)\right)}{\pi(f+f_0)}e^{-j\pi(f+f_0)(t_1+t_2)} \tag{2}$$

$$z_{n_1,n_2,f_0,\phi}[n] = \cos(2\pi f_0 n T_e + \phi)\mathbf{1}_{\{n_1\dots n_2\}}(n) \tag{3}$$

$$\hat{Z}_{n_1,n_2,f_0,\phi}(f) = \frac{e^{j\phi}}{2}e^{-j\pi\frac{f-f_0}{f_e}(n_1+n_2)}\frac{\sin\left(\pi\frac{f-f_0}{f_e}(n_2-n_1+1)\right)}{\sin\left(\pi\frac{f-f_0}{f_e}\right)} + \frac{e^{-j\phi}}{2}e^{-j\pi\frac{f+f_0}{f_e}(n_1+n_2)}\frac{\sin\left(\pi\frac{f+f_0}{f_e}(n_2-n_1+1)\right)}{\sin\left(\pi\frac{f+f_0}{f_e}\right)} \tag{4}$$

1. *Pourquoi la transformée de Fourier n'est pas un outil adapté pour ce type de signaux ?*
2. *Pourquoi le fait d'utiliser une fenêtre triangulaire serait préférable à une fenêtre rectangulaire ?*
3. *Pourquoi si $\phi = 0$ et $t_1 + t_2 = 0$, les transformées de Fourier calculées (2) et (4) sont alors réelles ?*
4. *Pourquoi $y_{t_1+\tau,t_2+\tau,f_0,\phi}(t)$ n'est pas identique à la copie de $y_{t_1,t_2,f_0,\phi}(t)$ retardé de τ. Expliquez pourquoi les formules (2) et (4) doivent vérifier*

$$\hat{Y}_{t_1+\tau,t_2+\tau,f_0,\phi}(f) = \hat{Y}_{t_1,t_2,f_0,\phi+2\pi f_0\tau}(f)e^{-j2\pi f_0\tau}$$

$$\hat{Z}_{n_1,n_2,f_0,\phi}(f) = \hat{Z}_{n_1,n_2,f_0,\phi+2\pi f_0 T_e}(f)e^{-j2\pi f_0 T_e}$$

5. *Calculez la transformée de Fourier temps discret de z_n définie par $z_n = -\delta_{n+1} + \delta_n - \delta_{n-1} + \delta_{n-2}$, et montrez que l'on retrouve dans ce cas (4).*

6. *Montrez en analysant les formules (2) et (4) que dans cet exemple si $f_0 < fe/10$ et pour $f < fe/10$, $\hat{Y}(f)$ et $\hat{Z}(f)$ sont très proches à un coefficient de proportionnalité prés. Expliquez pourquoi il est faux en général de prétendre que le spectre d'un signal temps discret et d'un signal analogique coïncident à basses fréquences.*

7. *Où sont les maxima de $\hat{Z}(f)$, quelle est la largeur des lobes de $\hat{Z}(f)$? Exprimez la transformée de Fourier locale de x_n en fonction de $\hat{Z}(f)$ pour $n_0T_e << T_1$ puis pour $n_0T_e >> T_1$. A partir de la figure 7, estimez f_0 et f_1 et N la taille de la fenêtre w_n utilisée, par exemple en comptant les lobes.*

8. *On se place maintenant en $t = T_1$, calculez la transformée de Fourier locale à cet instant au moyen de (4) et en utilisant les valeurs de f_0, f_1 et N trouvées précédemment montrez que les pics en f_0 et f_1 sont ici confondus comme le confirme la figure 8.*

9. *Le choix de la taille de la fenêtre est un compromis entre une bonne capacité à séparer les fréquences et une bonne sensibilité à la variation de la fréquence au cours du temps. Ecrire les deux inégalités correspondantes et construire une relation d'incertitude temps-fréquence. La transmission d'informations par modulation de fréquence pose des problèmes similaires : chaque bit est transmis sous la forme d'une fréquence (éventuellement d'une phase) pendant un temps donné, le récepteur doit pouvoir reconnaître cette fréquence.*

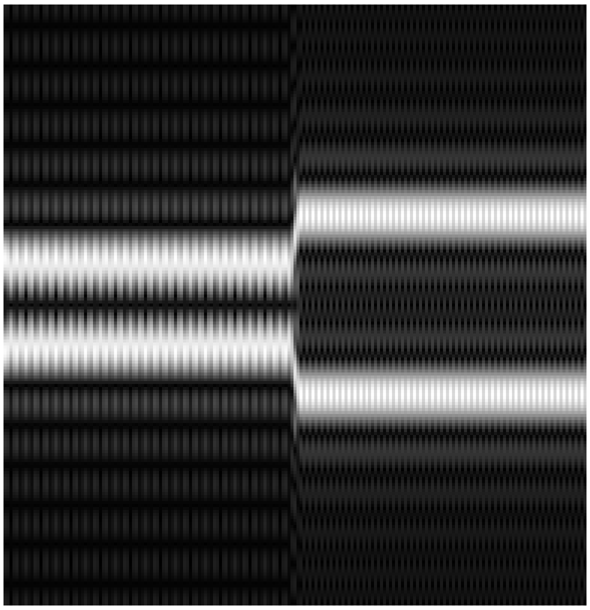

Figure 7: Transformée de Fourier locale de x_n

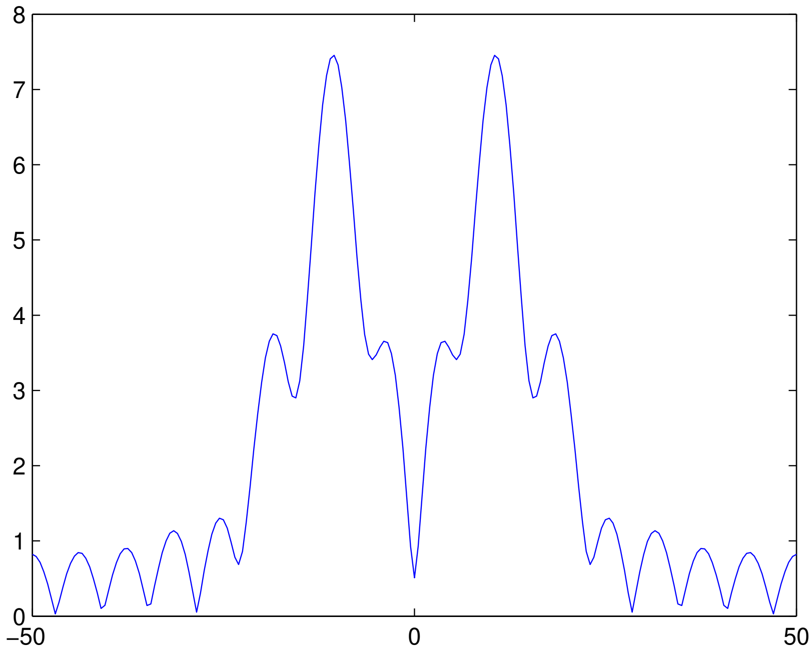

Figure 8: Transformée de Fourier locale de x_n en $t = T_1$