Chapter 4

Transformées de Fourier des signaux temps discret : Cours D

4.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

la transformée de Fourier à temmps discret est un cas particulier de la transformée de Fourier, cette transformée de Fourier à temps discret ne s'applique que sur des signaux temps discret non-périodiques. La transformée de Fourier d'un tel signal est une fonction définie pour toutes les fréquences, f_e-périodique où f_e est la fréquence d'échantillonnage. Il s'agit d'une fonction à valeurs complexes dont le module est une fonction paire ($|\hat{X}(f)| = |\hat{X}(-f)|$) et la phase est impaire ($\arg(\hat{X}(f)) = -\arg(\hat{X}(-f))$). Elle est définie par :

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_e}$$

On peut noter que si on avait cherché à approximer le résultat de la transformée de Fourier ($\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$) en approximant le signal $x(t)$ par la suite x_n, on aurait trouvé la transformée de Fourier temps discret multiplié par T_e. Dans la définition ce T_e n'est pas présent, mais il y a de nombreuses occasions où de fait on le rajoute (soit pour ajuster les spectre d'un signal temps continu avec un signal temps discret, soit pour établir des équivalences entre la transformée de Fourier et la transformée de Fourier temps discret pour des signaux particuliers).

La transformée de Fourier discrète inverse transforme un spectre qui est f_e-périodique en une succession de raies qui correspond au signal temps discret aussi la formule calcule une suite à partir d'une fonction à valeurs complexes définies sur un intervalle :

$$x_n = \frac{1}{f_e}\int_{-f_e/2}^{f_e/2} \hat{X}(f)e^{j2\pi f n T_e}$$

où x_n est un signal temps discret dont la période d'échantillonnage est $1/f_e$.

4.2 Propriétés de la transformée de Fourier à temps discret

Soit s_n un signal temps discret non périodique à valeurs réels. Alors sa transformée de Fourier à temps discret $\hat{S}(f)$ vérifie pour tout f.

$$\begin{array}{lcl}
\hat{S}(-f) & = & \bar{\hat{S}}(f) \\
|\hat{S}(-f)| & = & |\hat{S}(f)| \\
\arg\left(\hat{S}(-f)\right) & = & -\arg\left(\hat{S}(f)\right)
\end{array}$$

De plus le fait que s_n est un signal pair ($s_n = s_{-n}$) est équivalent au fait que $\hat{S}(f)$ est réel.

L'énergie d'un signal s_n temps discret non périodique peut aussi être évaluée à partir de son spectre (théorème de Parseval)

$$E = \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\hat{S}(f)|^2\,df$$

C'est le fait que le signal est non périodique qui fait qu'on s'intéresse à l'énergie et non à la puissance, (qui serait nulle). La définition de l'énergie utilisée ne dépend pas de f_e, ainsi si on multiplie par 2 f_e, le spectre de $\hat{S}(f)$ reste périodique par rapport à f_e, l'intégrale ainsi calculée aurait alors doublée en valeur mais comme il faut aussi diviser par f_e, le résultat serait encore identique.

On a aussi les relations suivantes :

$$\hat{X}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$$

$$x_0 = \frac{1}{f_e}\int_{-f_e/2}^{f_e/2} \hat{X}(f)\,df$$

La transformée de Fourier à temps discret est un opérateur linéaire. Elle conserve la multiplication par un facteur λ

$$\mathbb{TFTD}[\lambda x_n](f) = \lambda \mathbb{TFTD}[x_n](f)$$

où x_n est un signal temps discret non périodique. Elle conserve l'additivité des signaux

$$\mathbb{TFTD}[x_n + y_n](f) = \mathbb{TFTD}[x_n](f) + \mathbb{TFTD}[y_n](f)$$

Un retard sur un signal temps discret non périodique se traduit aussi par un déphasage du spectre

$$\mathbb{TFTD}[x_{n-d}](f) = e^{-j2\pi f dT_e}\mathbb{TFTD}[x_n](f) \tag{4.1}$$

où x_n et x_{n-d} sont deux signaux temps discret non périodiques, le deuxième étant retardé de dT_e par rapport au premier et $T_e = \frac{1}{f_e}$ est la période d'échantillonnage.

Un spectre peut être décalé en fréquence par la multiplication d'un signal approprié

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n e^{j2\pi f_0 n T_e}\right](f) = \mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f - f_0)$$

où x_n est un signal temps discret non périodique. Dans la pratique on multiplie x_n par un signal sinusoïdal de fréquence f_0 et on obtient un spectre qui est décalé vers des fréquences plus élevées de f_0 et plus basses de f_0

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n \cos(2\pi f_0 n T_e)\right](f) = \frac{1}{2}\mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f - f_0) + \frac{1}{2}\mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f + f_0)$$

On utilise en général un filtre passe-haut ou passe-bande pour supprimer le décalage en fréquence non souhaitée.

Dilater ou concentrer un signal temps discret non périodique signifie changer sa période d'échantillonnage ou sa fréquence d'échantillonnage sans changer les valeurs prises par la suite qui définit ce signal. Soit x_n un signal TDNP échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage f_e^x et y_n un signal TDNP ayant les mêmes valeurs que x_n mais échantillonné avec une autre fréquence d'échantillonnage f_e^y. On pose $a = \frac{T_e^y}{T_e^x}$. Alors les deux spectres prennent les mêmes valeurs mais pas pour les mêmes fréquences et $\frac{f_e^y}{f_e^x} = \frac{1}{a}$. Pour tout f

$$\hat{Y}(f) = \hat{X}(af)$$

On ne peut pas dériver ou intégrer un signal temps discret, en revanche à partir d'un signal temps discret non périodique, on peut définir le signal différence ou le signal somme cumulée avec la même fréquence d'échantillonnage. Le premier a pour valeur les différences entre les termes successifs des signaux. Le deuxième a pour valeur les valeurs successives des sommes cumulées. De façon analogue à la transformée de Fourier il y a aussi une relation la transformée de Fourier à temps discret d'un signal temps discret non périodique et la transformée de Fourier à temps discret du signal différence et aussi avec la transformée de Fourier à temps discret du signal somme cumulée.

Soit x_n un signal temps discret non périodique et $y_n = x_n - x_{n-1}$ le signal différence correspondant alors

$$\hat{Y}(f) = (1 - e^{-j2\pi f T_e})\hat{X}(f) \tag{4.2}$$

En effet $\hat{Y}(f) = \text{TFTD}[x_n](f) - \text{TFTD}[x_{n-1}](f) = \hat{X}(f) - e^{-j2\pi f T_e}\hat{X}(f)$ (x_{n-1} est le signal retardé et on a appliqué (4.1)).

Soit x_n un signal temps discret non périodique et $y_n = \sum_{k \leq n} x_k$ le signal somme cumulée alors

$$\hat{Y}(f) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi f T_e}}\hat{X}(f) \tag{4.3}$$

Cette propriété peut être vue comme une conséquence de (4.2), puisque $x_n = y_n - y_{n-1}$.

Il est intéressant de noter que (4.2) et (4.3) ressemblent à (3.8) et (3.9) quand on fait tendre fT_e vers zéro.

La transformée de Fourier à temps discret transforme le produit de convolution entre deux signaux à temps discret non périodiques en un simple produit de transformée de Fourier.

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n \overset{d}{*} y_n\right](f) = \mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f)\mathbb{TFTD}\left[y_n\right](f) \tag{4.4}$$

Pour des signaux temps discret non périodiques, on définit le produit de convolution à temps discret par

$$x_n \overset{d}{*} y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs et négatifs.

A la différence de la transformée de Fourier pour les signaux à temps continu, il n'y a ici pas de difficultés mathématiques pour donner un sens à la transformée de Fourier à temps discret des signaux suivants.

La transformée de Fourier d'un Dirac à temps discret est la fonction constante 1.

$$TFTD\left[\delta_n\right](f) \quad = \quad 1$$

On peut remarquer que ce spectre est périodique mais en fait périodique de période f_e pour toute valeur de f_e. De même δ_n correspond à un signal temps discret qui ne dépend pas de la période d'échantillonnage T_e. Il confirme (4.4) dans la mesure où δ_n est l'élément neutre du produit de convolution $\delta_n \overset{d}{*} x_n = x_n$ et de même 1 est l'élément neutre du produit $1\hat{X}(f) = \hat{X}(f)$.

L'équivalent à temps discret d'une fonction porte est un signal qui vaut 1 pour $0 \leq n < N$ et 0 ailleurs et est défini par $x_n = \mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]$. Sa transformée de Fourier ressemble à un sinus cardinal, il s'agit d'un quotient de sinus qui en basse fréquence est approximativement égale au sinus cardinal mais qui est aussi une fonction périodique de période f_e.

$$TFTD\left[\mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]\right](f) \quad = \quad e^{-j\pi f(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi f N T_e)}{\sin(\pi f T_e)} \tag{4.5}$$

Cette relation se démontre en utilisant $\sum_{n \geq 0} z^{-n} = \frac{1 - z^{-n-1}}{1 - z^{-1}}$ et en cherchant à mettre en facteur $e^{-j\pi f N T_e}$ dans la partie haute de la fraction et $e^{-j\pi f T_e}$ dans la partie basse de la fraction. Avec cette relation, on observe aussi que si N augmente, le signal en temps a une durée plus longue et que le spectre correspondant a des lobes plus étroits et des valeurs plus élevés tout en conservant une périodicité identique et égale à f_e.

La transformée de Fourier de signaux sinusoïdaux de fréquence f_0 sur une durée N et à temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_e > 2f_0$ forme un spectre périodique dont la période est composé de deux pics en f_0 et en $-f_0$ avec des ondulations.

$$TFTD\left[\cos(2\pi f_0 nT_e)\mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]\right](f) = \frac{1}{2}e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi(f-f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f-f_0)T_e)} + \frac{1}{2}e^{-j\pi(f+f_0)(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi(f+f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f+f_0)T_e)}$$
$$TFTD\left[\sin(2\pi f_0 nT_e)\mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]\right](f) = \frac{1}{2j}e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi(f-f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f-f_0)T_e)} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi(f+f_0)(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi(f+f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f+f_0)T_e)}$$

Ces relations se démontrent en appliquant un décalage fréquentiel au spectre obtenu en (4.5). On observe aussi que si N augmente alors les pics en f_0 et $-f_0$ se détachent mieux des ondulations, ces pics sont plus élevés et les ondulations sont plus resserés autour des deux pics. Même lorsque la condition $f_e > 2f_0$ n'est pas vérifiée les formules restent vraies, mais ce qui se passe est qu'on ne voit plus les pics, et ce à cause du terme sous la fraction qui au lieu d'atténuer comme dans le cas d'un sinus cardinal contribue à masquer ou à donner une apparence de déplacement de ces pics. Cette condition $f_e > 2f_0$ correspond à une approximation du critère de Shannon Nyquist, ce serait le critère si le signal considéré était un vrai signal.

4.3 Transformée de Fourier discrète (TFD)

La transformée de Fourier discrète est adaptée au cas des signaux temps discret périodiques de fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$ et de période $T = NT_e$. Le spectre est alors périodique de période f_e parce que le signal est temps discret. Le spectre est composé de raies espacées de $\frac{f_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T}$ parce que le signal est périodique de période $T = NT_e$.

On considère un signal temps discret périodique s_n de période N échantillonnée à f_e. La transformée de Fourier $\hat{S}(f)$ est périodique de période f_e et est formée d'une succession de raies aux fréquences $f_k = k\frac{f_e}{N}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (Z étant les entiers positifs et négatifs).

$\hat{S}(f)$ est décrite par des coefficients qui correspondent à $f_k = k\frac{f_e}{N}$ pour $k \in \{0...N-1\}$ et qui sont :

$$\hat{S}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \tag{4.6}$$

Ces coefficients forment une suite périodique de période N. Ce sont ces coefficients qui permettent de calculer la transformée de Fourier discrète. Aussi la transformée de Fourier discrète peut aussi s'écrire de cette façon

$$\hat{S}_k = \mathbb{TFD}[s_n][k]$$

Dans cette écriture on dit que $\hat{S}_k$ est périodique de période N.

La transformée de Fourier discrète de s_n peut s'écrire aussi

$$\mathbb{TF}[s_n](f) = f_e \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{S}_k\delta(f - k\frac{f_e}{N} - lf_e) \tag{4.7}$$

Le deuxième signe somme et le paramètre k décrit les différentes raies au sein de l'intervalle de fréquences $[0, f_e]$. Le premier signe somme et le paramètre l décrit la façon dont les différentes raies au sein de l'intervalle de fréquences $[0, f_e]$ sont rendues périodiques et s'étalent sur l'ensemble des fréquences. Dans cette deuxième écriture on dit que $\hat{S}(f)$ est périodique de période f_e. Cette écriture est en fait moins utilisée, on remplace généralement le premier signe somme en utilisant le fait que $\hat{S}_k$ est en fait périodique. Le terme f_e est rajouté pour rendre compatible cette formule avec la définition des séries de Fourier, en effet f_e est en fait $\frac{1}{T_e}$.

La transformée de Fourier discrète peut aussi s'écrire aussi

$$\mathbb{TF}[s_n](f) = f_e \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{TFD}[s_n][k]\delta(f - k\frac{f_e}{N}) \tag{4.8}$$

On retrouve aussi le terme f_e.

Par convention nous utiliserons pour la transformée de Fourier d'un signal temps discret périodique l'expression $\mathbb{TF}[s_n](f)$ lorsqu'il s'agit de la décrire au moyen d'un ensemble de fonctions de Dirac périodique de période f_e et l'expression $\mathbb{TFD}[s_n][k]$ lorsqu'il s'agit de la décrire par une suite de coefficients à valeurs complexes et périodique de période N. La définition de $\mathbb{TFD}[s_n][k]$ n'est pas unique, le terme de normalisation N est parfois introduit dans la transformée de Fourier discrète inverse, c'est le cas de Matlab, ce terme est parfois réparti entre la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier discrète inverse sous la forme de deux produits par $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

L'utilisation importante de la transformée de Fourier ne provient pas tellement de ce que dans la réalité il est souvent pertinent de modéliser un ensemble d'évènements par un signal temps discret périodique, mais surtout de la possibilité de calculer avec un ordinateur (4.6) ce qui n'était pas exactement le cas des autres transformées de Fourier. En fait il y a même un algorithme rapide qui optimise le calcul de (4.6) qui s'appelle la transformée de Fourier rapide (TFR) ou `Fast Fourier Transform` (FFT).

C'est la raison pour laquelle on s'intéresse à l'approximation suivante. Soit $x(t)$ un signal temps continu non périodique nul sauf en un intervalle $[0, T]$. Soit x_n le signal temps discret périodique, échantillonné en respectant le critère de Shannon-Nyquist, rendu périodique de période N en modifiant les données nulles. On suppose aussi que N est suffisamment grand pour que $T \leq NT_e$. Alors pour k entier dans $[-N/2...N/2]$,

$$\mathbb{TF}[x(t)](kf_e/N) \approx NT_e\mathbb{TFD}[x_n][k]$$

Le terme NT_e rajouté est là pour coïncider avec l'approximation, N annule la division par N faite dans la définition de $\mathbb{TFD}$ faite à tort vis-à-vis de cette approximation et T_e est la largeur des rectangles utiliser pour approximer l'intégrale faite dans la transformée de Fourier de $x(t)$. Même si on est amené à l'utiliser souvent, cette approximation n'est pas toujours de bonne qualité.

On peut naturellement aussi chercher à approximer la transformée de Fourier d'un signal temps continu non périodique par le calcule de la transformée de Fourier à temps discret du signal échantilloné à l'aide de l'ordinateur en un ensemble fini de fréquences mais si cet ensemble de fréquences en lesquels on calcule est comparable aux nombre de données que l'on dispose, les erreurs que l'on commet sont similaires à ceux que l'on effectue en utilisant une transformée de Fourier discrète.

Lorsqu'on calcule une transformée de Fourier discrète à l'aide d'un ordinateur, celui-ci fournit les coefficients à valeurs complexes $\hat{S}_k$ pour $k \in \{0...N-1\}$ qui correspondent aux fréquences $f_k = \frac{kf_e}{N} \in [0, f_e[$ Ces coefficients suffisent à déterminer complètement la transformée de Fourier discrète puisque celle-ci est périodique de période f_e. Cependant on visualise en général cette transformée de Fourier sur l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$ et non sur $[0, f_e]$ et l'allure des courbes n'est pas du tout la même suivant qu'on la représente sur le premier ou le deuxième intervalle. Ainsi un spectre qui serait croissant entre $-f_e/2$ et 0 puis décroissant entre 0 et $f_e/2$ et serait donc maximal au centre apparaîtrait comme minimal au centre s'il était représenté sur $[0, f_e]$ puisque décroissant entre 0 et $f_e/2$ et croissant entre $f_e/2$ et f_e. Par conséquent pour visualiser un spectre à partir de ses coefficients $\hat{S}_k$ calculés par transformée de Fourier discrète il est nécessaire de trouver les coefficients correspondant aux fréquences $f_k \in [-f_e/2, 0]$. Si N est paire ce sont les fréquences associées à $k \in \{\frac{N}{2}..N-1\}$, mathématiquement on peut aussi bien mettre $k = N/2$ associé à $f = f_e/2$ ou à $f = -f_e/2$ tout à droite ou tout à gauche du graphique. Si N est impaire ce sont les fréquences associées à $k \in \{\frac{N+1}{2}..N-1\}$. Dans la visualisation sur $[-f_e/2, 0]$ les fréquences associés à ces coefficients sont $f_k = \frac{(k-N)f_e}{N}$, elles sont notées f'_k ou $k' = k - N$ et les coefficients complexes correspondant sont $\hat{S}_k$ et souvent notés $\hat{S}_{k'}$.

La transformée de Fourier discrète inverse est définie de manière similaire. On considère un spectre périodique $\hat{S}(f)$ de période f_e ayant des raies aux fréquences $f_k = k\frac{f_e}{N}$ pour $k \in \{0...N-1\}$ associés aux coefficients $\hat{S}_k$.

Alors la transformée de Fourier discrète inverse, notée $\mathbb{TFD}^{-1}$, est un signal s_n de période N

$$s_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

La transformée de Fourier discrète inverse s'écrit aussi

$$\mathbb{TFD}^{-1}[\hat{S}_k](t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \delta(t - nT_e) \tag{4.9}$$

4.4 Propriétés de la transformée de Fourier discrète

Soit s_n un signal temps discret périodique. Alors les coefficients de sa transformée de Fourier discrète $\hat{S}_k$ vérifient

$$\begin{array}{rcl} \hat{S}_{-k} & = & \bar{\hat{S}}_k \\ |\hat{S}_{-k}| & = & |\hat{S}_k| \\ \arg(\hat{S}_{-k}) & = & -\arg(\hat{S}_k) \end{array}$$

Si s_n est un signal temps discret périodique et paire ($s_n = s_{-n}$ ou dit autrement $s_n = s_{N-n}$) alors $\hat{S}_k$ est à valeurs réels. En fait il y a même équivalence entre le fait que $\hat{S}_k$ est réel et la parité de s_n.

La puissance d'un signal s_n TDP peut aussi être évalué à partir de son spectre (théorème de Parseval)

$$\begin{array}{rcl} E & = & +\infty \\ P & = & \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{S}_k|^2 \end{array}$$

On peut remarquer que cette égalité ne dépend pas de la fréquence d'échantillonnage et en fait la définition de P ne fait pas non plus intervenir la période d'échantillonnage ou la fréquence d'échantillonnage.

On a aussi les relations suivantes :

$$\hat{X}_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

$$x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_n$$

La transformée de Fourier discrète est un opérateur linéaire. Elle conserve la multiplication par un facteur λ et l'additivité.

$$\mathbb{TFD}[\lambda x_n][k] = \lambda \mathbb{TFD}[x_n][k]$$

où x_n est un signal temps discret périodique de période N et échantillonné à la fréquence f_e.

$$\mathbb{TFD}[x_n + y_n][k] = \lambda \mathbb{TFD}[x_n + y_n][k]$$

où x_n et y_n sont deux signaux temps discret périodiques de même période N et échantillonné à la même fréquence f_e.

La transformée de Fourier discrète d'un signal retardée est déphasée.

$$\mathbb{TFD}[x_{n-d}][k] = e^{-j2\pi k\frac{d}{N}} \mathbb{TFD}[x_n][k] \tag{4.10}$$

où x_n et x_{n-d} sont deux signaux temps discret périodique de même période N échantillonné à la même fréquence f_e, le deuxième signal est retardé de $d < N$ pas de temps par rapport au premier signal. Du fait que ces deux signaux sont périodiques, on peut aussi dire que x_{n-d} est en avance de $N - d$ pas de temps sur x_n, en effet $x_{n-d} = x_{n+(N-d)}$.

Lorsqu'un signal temps discret périodique est dilaté, ce ne sont pas les valeurs complexes calculées par la transformée de Fourier discrète qui sont modifiées, mais la fréquence d'échantillonnage qui est modifié et en l'occurence diminuée. Il en résulte alors que le spectre est modifié du fait de la diminution des valeurs complexes associées aux différentes raies et du fait des fréquences de ces différentes raies qui sont plus proches les unes des autres.

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N échantillonné à la fréquence d'échantillonnage f_e^x et y_n un signal temps discret périodique avec les mêmes valeurs que x_n et de même période N mais échantillonné à la nouvelle fréquence f_e^y. Alors les raies de $\hat{Y}(f)$ sont espacées de $\frac{f_e^y}{N}$ tandis que celles de $\hat{X}(f)$ sont espacées de $\frac{f_e^x}{N}$

$$\hat{Y}_k = \hat{X}_k$$
$$\frac{1}{f_e^y}\hat{Y}(f) = \frac{1}{f_e^x}\hat{X}_k$$

Pour deux signaux temps discret périodiques x_n et y_n de même période N et de même fréquence d'échantillonnage f_e, il est faux de dire que le produit des transformées de Fourier est la transformée d'un produit de convolution. C'est une idée fausse ne serait-ce parce que le produit de convolution est définie par une somme infine et qu'appliqué à des signaux périodiques il produirait une suite infinie en tout instant. Cette propriété est vraie si on utilise le produit de convolution circulaire définie par

$$x_n \circledast y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k} \tag{4.11}$$

Cependant si N est grand, $x_n \circledast y_n$ est parfois une bonne approximation du produit de convolution de signaux rendus non périodiques en annulant les indices contenus hors de $\{0...N-1\}$. Cette approximation est, nous le verrons, assez souvent utiliser en particulier lorsque les filtres sont assez complexes et leur réponses fréquentielles bien déterminées. Cette approximation repose sur la même idée que le fait de considérer la transformée de Fourier discrète comme une bonne approximation de la transformée de Fourier à temps discret.

4.5 Exemples de transformées de Fourier discrète de signaux

On considère un signal $x_n = 1$ échantillonné à la fréquence d'échantillonnage f_e et périodique de période $N = 1$. Sa transformée de Fourier discrète est $\hat{X}_k = 1$ d'après (4.6), mais ces coefficients complexes correspondent à des fréquences qui sont espacées de f_e, tandis que le signal x_n a ses échantillons espacées de $T_e = \frac{1}{f_e}$. x_n et $\hat{X}_k$ correspondent à un signal et à un spectre tous deux composés d'une infinité de raies régulièrement espacés qui sont ce qu'on appelle un peigne de Dirac et c'est pour cette raison que l'on dit aussi que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, en fait un peigne de Dirac divisé par l'intervalle de temps entre chaque Dirac du premier peigne de Dirac, ce qui revient à dire multiplié par f_e, ceci confirme le terme f_e rajouté dans (4.7) et (4.8).

$$\mathbb{TF}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT_e)\right] = \frac{1}{T_e}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(f-kf_e)\right]$$

On considère un signal $x_n^{(1)}$ périodique de période N et échantillonné à la fréquence $f_e^{(1)}$ défini par $x_n^{(1)} = \{10...0\}$. Sa transformée de Fourier est $\hat{X}_k^{(1)} = \frac{1}{N}\{1...1\}$ d'après (4.6). On peut aussi voir $x_n^{(1)}$ comme étant une façon différente d'écrire le signal x_n en posant $T_e = NT_e^{(1)}$, $NT_e^{(1)}$ sépare en effet les échantillons non-nuls de $x_n^{(1)}$ qui sont les seuls échantillons utiles. Le spectre de x_n est en fait composé de raies espacées de $f_e = \frac{f_e^{(1)}}{N}$ et de valeur $f_e \times 1 = \frac{f_e^{(1)}}{N}$ qui coïncide avec le spectre de $x_n^{(1)}$ dont les raies sont aussi espacées $\frac{f_e^{(1)}}{N}$ et ont aussi comme valeur $f_e^{(1)}\frac{1}{N}$. On confirme ainsi aussi l'importance du terme f_e rajouté dans (4.8).

On considère un signal $x_n^{(2)}$ périodique de période N et échantillonné à la fréquence $f_e^{(2)}$ défini par $x_n = \{11...1\}$. Sa transformée de Fourier discrète vaut $\hat{X}_k = \{10...0\}$ d'après (4.6). On peut aussi voir $x_n^{(2)}$ comme étant une façon différente d'écrire le signal x_n en posant $T_e = T_e^{(2)}$. Le spectre de x_n est composé de raies espacées de $f_e = N\frac{f_e^{(2)}}{N}$ et de valeur $f_e = f_e^{(2)}$ qui coïncident avec les raies non-nulles de $x_n^{(2)}$ qui sont espacées de $N\frac{f_e^{(2)}}{N}$ (il n'y a qu'une valeur de k pour chaque ensemble de N valeurs pour lesquelles $\hat{X}_k$ sont non-nuls), et ces raies sont de valeurs $f_e^{(2)}$ puisque quand $\hat{X}_k$ est non-nul il vaut 1.

On considère un signal $x_n^{(3)}$ temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_e^{(3)}$ et périodique de période N défini sur sa période par δ_{n-d} où $d \in \{0..N-1\}$. Sa transformée de Fourier discrète vaut $\hat{X}_k = \frac{1}{N}e^{-j2\pi\frac{dk}{N}}$ par application de (4.6). On peut aussi voir que $x_n^{(3)}$ est le signal $x_n^{(1)}$ retardé de d pas de temps et retrouver ainsi le résultat par application de (4.10).

On considère un signal $x_n^{(4)}$ temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_e^{(4)}$ et périodique de période N définie par $x_n = \cos(2\pi\frac{dn}{N})$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\begin{array}{rcl} \hat{X}_d^{(4)} & = & \frac{1}{2} \text{ et } \hat{X}_{N-d}^{(4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \hat{X}_{k\neq\{d,N-d\}}^{(4)} = 0 \text{ si } d \neq N/2 \\ \hat{X}_{N/2}^{(4)} & = & 1 \text{ et } \hat{X}_{k\neq d}^{(4)} = 0 \text{ sinon} \end{array}$$

Il serait difficile de trouver ce résultat avec (4.6) mais on peut décomposer x_n en la somme de deux exponentielles complexes $x_n = \frac{1}{2}e^{j2\pi\frac{dn}{N}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{dn}{N}}$ et utiliser la définition de la transformée de Fourier discrète inverse (4.9). On considère d'abord le cas $d \neq N/2$, et on voit que

$$\mathbb{TFD}^{-1}\left[\delta_{k-d}[k]\right][n] = e^{j2\pi\frac{dn}{N}}$$

et que

$$\mathbb{TFD}^{-1}\left[\delta_{k+N-d}[k]\right][n] = e^{j2\pi\frac{(N-d)n}{N}} = e^{-j2\pi\frac{dn}{N}}$$

Ce qui suffit pour trouver le résultat souhaité. Dans le cas où $d = N/2$, les deux exponentielles complexes qui composent le signal sinusoïdal sont en fait confondues en une seule exponentielle. Cet exemple montre qu'il est aussi possible de décaler le spectre fréquentiellement en le multipliant par un signal sinusoïdal, ce signal sinusoïdal étant lui aussi temps discret et périodique de la même période.

Répliquer un signal signifie juxtaposer le signal défini sur un intervalle de temps un certain nombre de fois. Répliquer un signal périodique sur un intervalle correspondant à sa période ne modifie pas le signal. Mais s'agissant d'un signal temps discret périodique, cela modifie considérablement les calculs effectués par la transformée de Fourier discrète et tout se passe comme si la réplication de P fois le signal introduit $P-1$ zéros dans les coefficients de la transformée de Fourier discrètes calculés.

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N de fréquence d'échantillonnage f_e de coefficients de transformée de Fourier discrète $\hat{X}_k$. Soit y_n un signal temps discret périodique de période PN échantillonné à f_e défini par

$$y_n = \{x_0...x_{N-1}x_0...x_{N-1}...x_0..x_{N-1}\}$$

Alors

$$\hat{Y}_k = \{X_0\, 0...0\, X_1\, 0...0\, ...X_{N-1}\, 0...0\}$$

Insérer des zéros dans un signal temps discret signifie augmenter la fréquence d'échantillonnage par un facteur multiplicatif entier et mettre à zéro la valeurs des échantillons nouvellementa apparus. Cela ne change pas le signal, mais s'agissant d'un signal temps discret périodique, cela modifie considérablement le calcul de la transformée de Fourier discrète et tout se passe comme si l'introduction de $P-1$ zéros dans le signal temps discret (et la multiplication par P de la fréquence d'échantillonnage) provoque la réplication P fois, des coefficients de la transformée de Fourier discrète calculés.

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N de fréquence d'échantillonnage f_e et de coefficients de transformée de Fourier discrète $\hat{X}_k$. Soit y_n un signal temps discret périodique de période PN de fréquence d'échantillonnage Pf_e défini par

$$y_n = \{x_0\, 0...0\, x_1\, 0...0\, ...\, x_{N-1}\, 0...0\}$$

Alors

$$\hat{Y}_k = \frac{1}{P}\{X_0X_1...X_{N-1}X_0X_1...X_{N-1}...X_0X_1...X_{N-1}\}$$

4.6 Notation matricielle

En notant $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, on peut noter la transformée de Fourier discrète sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ : \\ \hat{X}_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & .. & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & .. & W^{2(N-1)} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & .. & W^{3(N-1)} \\ : & : & : & : & :: & : \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & .. & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Tous ces calculs sont faits à N fixés et dans ce cas la valeur de W ne change pas d'un bout à l'autre de la matrice, ce qui autorise cette écriture, mais ceci n'est plus vrai si on modifie N parce qu'alors la valeur de W change.

4.7 Bourrage de zéros

Le bourrage de zéros concerne les signaux à temps discret périodiques et se distinguent de l'insertion de zéros entre chaque échantillons, le bourrage de zéros consiste à placer tous ces zéros en un seul emplacement et le signal est réellement modifié. On a alors deux propriétés, d'une part si le nombre de zéros rajoutés est un multiple du nombre d'échantillons initial alors certaines valeurs de la transformée de Fourier discrète du nouveau signal coïncident avec les valeurs de la transformée de Fourier discrète de l'ancien signal à un facteur près. D'autre part plus on rajoute ainsi des zéros, plus la tranformée de Fourier discrète se rapproche de la transformée de Fourier à temps discret du signal apériodisé.

Pour un signal temps discret périodique de période N et de fréquence d'échantillonnage f_e, on appelle signal apériodisé le signal $y_n = x_n \mathbf{1}_{\{0..N-1\}}$.

Pour un signal x_n temps discret périodique de période N et de fréquence d'échantillonnage f_e, on dit qu'on fait un bourrage de zéro lorsqu'on considère le signal y_n temps discret de même fréquence d'échantillonnage f_e et périodique mais sur une période plus longue $M > N$

$$\begin{aligned} y_n &= x_n \text{ si } n \in \{0..N-1\} \\ y_n &= 0 \text{ si } n \in \{N..M-1\} \end{aligned}$$

La première propriété énonce que l'on peut parfois retrouver certaines valeurs complexes de la transformée de Fourier discrète du nouveau signal à partir de la transformée de Fourier discrète de l'ancien signal. Si M est un multiple de N alors $\forall k \in \{0..N-1\}, M\hat{Y}_{k\frac{M}{N}} = N\hat{X}_k$ Mais on n'a pas d'informations de ce type pour les autres valeurs.

La deuxième propriété concerne la possibilité d'utiliser le bourrage de zéros pour faire de l'approximation. Plus M est grand, plus on réalise un bonne approximation de la transformée de Fourier à temps discret du signal apériodisé

$$\mathbb{TFD}[y_n][k] \approx \mathbb{TFTD}\left[x_n \mathbf{1}_{\{0..N-1\}}[n]\right](kf_e/N)$$

Le terme bourrage de zéro est parfois utilisé lorsqu'on rajoute des zéros à la transformée de Fourier discrète de façon à réaliser un sur-échantillonnage avec interpolation. Cependant la façon de rajouter les zéros est différente et repose sur le prochain cours sur le repliement de spectre.