Chapter 2

Echantillonnage d'un signal : Cours B

2.1 Echantillonnage

On appelle échantillonnage le fait de transformer un signal temps continu en un signal à temps discret. On appelle période d'échantillonnage la durée entre deux échantillons, l'unité est a priori la seconde. On appelle fréquence d'échantillonnage l'inverse de la période d'échantillonnage, l'unité est a priori le Hertz (Hz). L'échantillonnage peut s'écrire ainsi :

$$s_n = s(nT_e) \tag{2.1}$$

Cependant on peut aussi noter les signaux temps discret comme étant une fonction ayant des diracs à chaqu'un des instants régulièrement réparties, c'est-à-dire qu'un signal temps discret peut s'écrire sous la forme

$$\sum_n s_n \delta(t - nT_e)$$

Du coup l'échantillonnage d'un signal s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$s_e(t) = \sum_n s(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Et ce signal échantillonné apparait comme le produit d'un signal par un peigne de dirac (somme infinie de diracs à des instants régulièrement répartis)

$$s_e(t) = \sum_n s(t)\delta(t - nT_e) = s(t)\left(\sum_n \delta(t - nT_e)\right)$$

La démonstration repose sur le fait que pour n'importe quelle fonction f, $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$, ce qui traduit le fait qu'un dirac est nul partout sauf en un instant particulier.

Lorsqu'on écrit un signal il est très important de mettre la même variable muette à gauche et à droite du signe égalité. Cette expression n'ont pas de sens

$$s_n = \sum_n s(t)\delta(t - nT_e)$$

Si un signal est périodique de période T et si la fréquence d'échantillonnage est multiple de $1/T$ alors s_n est N-périodique où $N = Tf_e$.

Dans une chaîne de mesure l'échantillonnage est réalisé par un échantillonneur, qui peut être un bloqueur d'ordre zéro. Dans ce cas l'échantillonnage est relativement conforme à l'équation (2.1) à un décalage de temps près, mais ce n'est pas toujours le cas. En fait (2.1) est plutôt une modélisation simple.

2.2 Critère de Shannon-Nyquist

Lorsqu'on échantillonne un signal, il est naturel de s'attendre à ce que le fait de chercher à retrouver le signal du départ à partir de la seule connaissance du signal échantillonné soit difficile, voire impossible, surtout si le signal de départ est très variable. Le critère de Shannon-Nyquist établit une durée minimale entre deux échantillons pour qu'il soit possible de reconstruire parfaitement le signal de départ à condition que ce signal de départ ne varie pas trop en un certain sens. Appliqué à une sinusoïde périodique de période T, ce critère affirme qu'il faut plus que deux points par période, ou dit autrement que la fréquence de la sinusoïde soit inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Pour pouvoir appliquer le critère de Shannon-Nyquist à des signaux plus complexes il est nécessaire d'introduire la notion de transformée de Fourier afin de déterminer si le signal n'est pas trop variable.

Dans une chaîne de mesure, il y a en général un filtre anti-repliement de spectre avant l'échantillonneur, cela permet d'enlever au spectre du signal les fréquences trop élevées (celles au-delà de la moitié de la fréquence d'échantillonnage) de telle façon que lorsqu'on reconstruit le signal à partir du signal échantillonné celui-ci ne soit pas trop éloigné du signal du départ (autrement dit on peut espérer que la seule différence soit celle dûe au fait qu'on a retiré les fréquences trop élevées).

2.3 Chaîne de mesure

Quand on cherche à utiliser la puissance informatique pour traiter un signal, ou pour le transmettre à distance via un réseau il est nécessaire de transformer le signal provenant de capteurs en un signal qui peut être utilisé par un ordinateur, puis de faire la transformation inverse. A ce titre une chaîne de mesure contient les éléments suivants :

- capteur
- filtre anti-repliement
- échantillonneur
- convertisseur analogique numérique
- unité de calcul
- convertisseur numérique analogique
- système de restitution

2.4 Puissance

Par convention on considère que le carré du signal à un instant donné, $s^2(t)$ est une puissance instantanée. Dans un certain nombre d'applications cette quantité n'est pas homogène à une énergie, elle peut cependant être utilisée pour décrire le signal. On appelle puissance la moyenne de la puissance instantanée et on appelle énergie la puissance instantanée cumulée au cours du temps.

Pour le calcul de la puissance et de l'énergie, il faut distinguer quatre cas

- Si le signal est temps continu et T-périodique :

  $$P = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt$$

  l'énergie est infinie, (sauf si la puissance est nulle auquel cas le signal est nul et l'énergie est nulle).

- Si le signal est temps continu et non-périodique :

  $$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

si l'énergie est non-infinie alors la puissance est nulle. Mais si l'énergie est infinie alors on peut essayer de calculer la puissance

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\, dt$$

- Si le signal est temps discret N-périodique :

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2$$

  l'énergie est infinie, (sauf si la puissance est nulle auquel cas le signal est nul et l'énergie est nulle).

- Si le signal est temps discret et non-périodique :

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} s_n^2$$

  si l'énergie est non-infinie alors la puissance est nulle. Mais si l'énergie est infinie alors on peut essayer de calculer la puissance

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} s_n^2$$

On observe les propriétés suivantes :

- Si on retarde un signal, c'est-à-dire si on considère $s(t-\tau)$ à la place de $s(t)$, c'est-à-dire si l'on considère un signal dont sa courbe aurait été décalée vers la droite, alors la puissance et l'énergie (si elles sont définies) restent identiques.
- Si on amplifie un signal, c'est-à-dire si on considère $s'(t) = \lambda s(t)$ au lieu de $s(t)$ alors la puissance et l'énergie sont amplifiées proportionnellement : $P' = \lambda^2 P$ et $E' = \lambda^2 E$.
- Si l'échelle des temps est dilatée, c'est-à-dire si on considère $s'(t) = s(t/a)$ alors la puissance est identique mais l'énergie est augmentée proportionnellement : $E' = aE$.
- Les énergies d'un signal sur des périodes de temps disjointes s'ajoutent :

$$s(t) = \sum_n \alpha_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}]}(t) \Rightarrow E = \sum_n \alpha_n^2 (T_{n+1} - T_n)$$

  où $\mathbf{1}_A(x)$ désigne la fonction caractéristique définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

- Les puissances d'un signal sur des plages de fréquences disjointes s'ajoutent :

$$s(t) = \beta_0 + \sum_n \beta_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \Rightarrow E = \beta_0^2 + \frac{1}{2} \sum_n \beta_n^2$$