# Problèmes de traitement numérique du signal

Gabriel Dauphin

## 1 Première partie du cours

**Problème 1** *(`102`) Considérons le filtre passe-bas du premier ordre réalisé à partir du montage électronique représenté sur la figure 1, avec $R = 1\Omega$ et $C = 1\mu\text{F}$.*

1. *Etablissez l'équation différentielle qui décrit ce filtre. $C$ désigne la capacité du condensateur et l'intensité qui le traverse est la dérivée de la charge sur chacune de ses bornes et cette charge est égale à $Cs(t)$. On suppose aussi que le montage en aval est de telle sorte qu'on peut négliger le courant sortant de la résistance n'irait pas dans le condensateur.*

2. *Déduisez la fonction de transfert. Représentez, dans le plan complexe, les pôles et les zéros de cette fonction de transfert. Le filtre est-il stable ?*

3. *A partir de la fonction de transfert, donnez l'expression de la réponse en fréquence du filtre. Tracez le gain $10 * \log_{10}(|H(f)|^2)$ en fonction de la fréquence (logarithme en base 10). Que vaut la fréquence de coupure, la pente du filtre (dB/octave). Un octave est le doublement de la fréquence.*

4. *En utilisant la transformée de Fourier inverse, calculez la réponse impulsionnelle de ce filtre.*

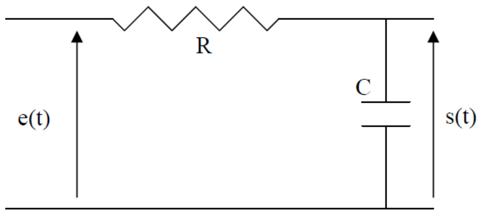


Figure 1: Circuit électrique

**Problème 2** *(`101`)*

*Le pair-à-pair (de l'anglais peer-to-peer) est un modèle de réseau informatique permettant à plusieurs ordinateurs de communiquer via un réseau, de partager simplement des objets, des fichiers le plus souvent, mais également des flux multimédia continus (streaming), le calcul réparti, la téléphonie (comme Skype) sur Internet. Pour le logiciel considéré ici, il s'agit de la récupération d'un fichier et le trafic de réception est décrit par deux courbes sur la figure 2. L'une des courbes mesure le débit d'informations toutes les $87\text{s}$ et est modélisé ici par une suite $x_n$, l'autre mesure le débit d'informations toutes les $46\text{min}$ et est modélisé ici par une autre suite $y_n$ ayant la même période d'échantillonnage que la première. Pour les deux courbes les mesures les plus récentes sont à droite, les plus vielles à gauche datent de 11 heures et l'ordonnée correspond au débit d'information, il est mesuré en kilo octet par seconde.*

1. *Quelle est cette période d'échantillonnage, notée $T_e$ ?*

2. *La relation entre $x_n$ et $y_n$ est celle d'un filtre linéaire temps invariant. Le modèle proposé ici est :*

$$y_n = \frac{1}{p+q+1} \sum_{k=-p}^{q} x_{n-k} \tag{1}$$

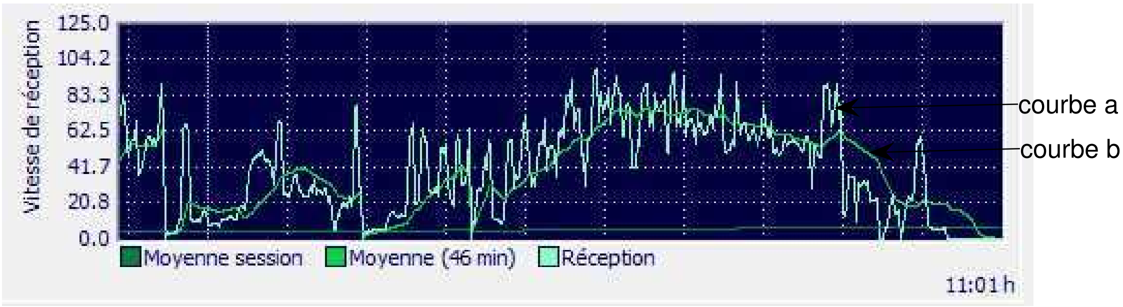


Figure 2: Evolution du débit d'information entrant

*Quelle est en fonction de $p$ et $q$, la réponse impulsionnelle de ce filtre ? Indiquez la flèche utilisée sur le diagramme de la figure 3 pour répondre à cette question.*

3. *La réponse fréquentielle de ce filtre vaut $1$ en la fréquence nulle. Indiquez sur le diagramme de la figure 3 la flèche à utiliser pour répondre à cette question. Calculez la réponse fréquentielle en la fréquence nulle et confirmez ce qui a été annoncé.*

4. *Quelle est la relation induite entre les moyennes de $x_n$ et de $y_n$ ?*

5. *Expliquez précisément pourquoi le filtre est causal si et seulement si $p = 0$.*

6. *Sur la figure 2, quelle courbe correspond à $x_n$ et quelle courbe correspond à $y_n$ ? Justifiez votre réponse.*

7. *Comment peut-on voir sur le graphique que le filtre est très probablement causal ?*

8. *On considère maintenant que des filtres causaux (i.e. $p = 0$, et la réponse impulsionnelle vaut $h_n = \frac{1}{q+1}$ pour $n \in \{0..q\}$ et $0$ ailleurs). Pour simplifier on considère maintenant que $q$ est paire. Montrez que ce filtre est à phase linéaire.*

9. *En utilisant par exemple (5), Montrez que la réponse fréquentielle vaut $\hat{H}(f) = \frac{1}{q+1} e^{-j\pi \frac{f}{f_e}(q)} \frac{\sin\left(\pi \frac{f}{f_e}(q+1)\right)}{\sin\left(\pi \frac{f}{f_e}\right)}$.*

10. *Montrez qu'en $f = f_e/2$, le module de la réponse fréquentielle vaut $\frac{1}{q+1}$.*

11. *Montrez que la réponse fréquentielle a l'allure d'un passe-bas.*

12. *Montrez que du point de vue de la phase de la réponse fréquentielle, ce filtre se comporte comme un filtre à retard $\frac{q}{2}T_e$.*

13. *Mesurez sur la figure 2 le retard de la deuxième courbe par rapport à la première courbe, déduisez-en une estimation de la valeur de $q$.*

14. *Justifiez par un raisonnement le fait de choisir pour $q$, la valeur suivante : $q \approx \frac{46\times 60}{87}$.*

15. *Montrez que la formule pour calculer à chaque instant le temps restant pour terminer la récupération d'un fichier de taille $Q$ à l'instant $nT_e$ peut être estimé par $\frac{Q - \sum_{k\leq n} x_k T_e}{y_n}$. Pourquoi est-il préférable de mettre $y_n$ au dénominateur et $x_n$ au numérateur ? On rappelle que $x_n$ et $y_n$ sont tous les deux des débits d'information mesurés en kilo octet par seconde.*

16. *En mesurant sur la figure 2, quel est l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour récupérer un fichier de $100\mathrm{M}o$.*

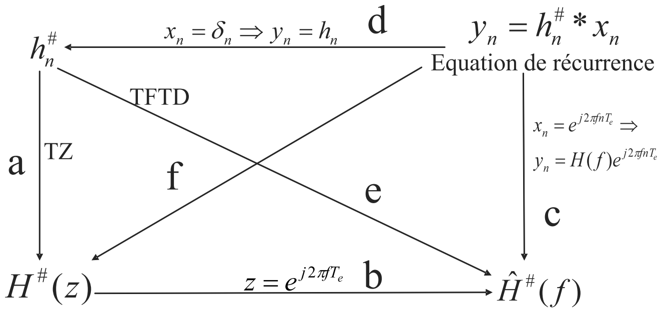


Figure 3: Diagramme

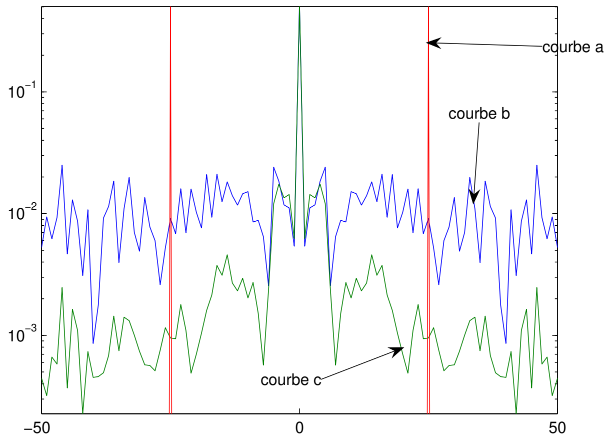


Figure 4: Données simulées

En utilisant les transformations usuelles (retard et produit), on calcule les transformées de Fourier des signaux suivants.

$$y_{t_1,t_2,f_0,\phi}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)\mathbf{1}_{[t_1,t_2]}(t) \tag{2}$$

$$\hat{Y}_{t_1,t_2,f_0,\phi}(f) = \frac{e^{j\phi}}{2}\frac{\sin\left(\pi(f-f_0)(t_2-t_1)\right)}{\pi(f-f_0)}e^{-j\pi(f-f_0)(t_1+t_2)} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\frac{\sin\left(\pi(f+f_0)(t_2-t_1)\right)}{\pi(f+f_0)}e^{-j\pi(f+f_0)(t_1+t_2)} \tag{3}$$

$$z_{n_1,n_2,f_0,\phi}[n] = \cos(2\pi f_0 n T_e + \phi)\mathbf{1}_{\{n_1\dots n_2\}}(n) \tag{4}$$

$$\hat{Z}_{n_1,n_2,f_0,\phi}(f) = \frac{e^{j\phi}}{2}e^{-j\pi\frac{f-f_0}{f_e}(n_1+n_2)}\frac{\sin\left(\pi\frac{f-f_0}{f_e}(n_2-n_1+1)\right)}{\sin\left(\pi\frac{f-f_0}{f_e}\right)} + \frac{e^{-j\phi}}{2}e^{-j\pi\frac{f+f_0}{f_e}(n_1+n_2)}\frac{\sin\left(\pi\frac{f+f_0}{f_e}(n_2-n_1+1)\right)}{\sin\left(\pi\frac{f+f_0}{f_e}\right)} \tag{5}$$

**Problème 3** *(`103`) On considère un panneau interdiction de stationner installé sur une porte de garage. Six voyants lumineux sont disposés régulièrement sur la circonférence du panneau. On cherche à décrire au moyen du traitement de signal le fonctionnement de ces voyants. On suppose ici qu'à chaque instant un voyant est allumé.*

1. *On numérote ces six voyants de 0 à 5, on note $t$ le temps exprimé en seconde. On appelle ici signal non la façon dont un voyant est allumé, mais la façon dont les six voyants s'allument ou s'éteignent : à partir de chaque signal $x_l$, ($l \in \{a,b,c\}$), on définit six signaux $x_{l0}$, $x_{l1}$, $x_{l2}$, $x_{l3}$, $x_{l4}$, $x_{l5}$ qui valent $1$ si le voyant $i$ est allumé et $0$ si ce voyant est éteint. Décrivez pour chacun de ces trois signaux $x_a$, $x_b$ et $x_c$ les séquences d'allumage et d'extinction des voyants lumineux à l'aide de représentations graphiques des six signaux associés. Chacun de ces trois signaux respectent la propriété énoncée plus haut :* à chaque instant un voyant est allumé.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_a(t) &=& 3 \\ x_b(t) &=& \sum_k 2\ \mathbf{1}_{[0,1/2[}(t-k) + \sum_k 4\ \mathbf{1}_{[1/2,1[}(t-k) \\ x_c(t) &=& \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) \end{array}\right.$$

2. *Pour chacun de ces signaux, dites s'il s'agit d'un signal périodique ou non-périodique, d'un signal temps discret ou temps continu, d'un signal à valeurs discrètes ou à valeurs continues.*

3. *Plutôt que de désigner les six voyants par six chiffres, on désigne maintenant ces voyants par six valeurs complexes*

$$1, \quad e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad -1, \quad e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

   *On considère le signal*

$$\left\{\begin{array}{lcl} z(t) &=& 1 \quad \textit{pour} \quad t \in [0,1[ \\ z(t) &=& e^{j\frac{\pi}{3}}z(t-1) \quad \textit{pour} \quad t \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

   *Décrivez pour ce signal $z(t)$ les séquences d'allumage et d'extinction des voyants lumineux à l'aide d'un graphique et en utilisant les mêmes six signaux de la question 1.*

4. *Ce signal $z(t)$, est-il un signal périodique ou non-périodique, un signal temps discret ou temps continu, un signal à valeurs discrètes ou à valeurs continues ? Si le signal est temps discret, quel est la période d'échantillonnage ? Si le signal est périodique, quelle est la période ?*

5. *Montrez que la transformée de ce signal se met sous la forme*

$$\hat{Z}(f) = \sum_k \hat{Z}_k \delta(f - \frac{k}{6})$$

6. *Montrez que* $\hat{Z}_0 = 0$

7. *A partir de la relation* $z(t) = e^{j\frac{\pi}{3}} z(t-1)$*, montrez que si* $k-1$ *n'est pas multiple de* $6$ *alors* $\hat{Z}_k = 0$*, et en particulier que*

$$0 = \hat{Z}_0 = \hat{Z}_2 = \hat{Z}_3 = \hat{Z}_{-3} = \hat{Z}_{-2} = \hat{Z}_{-1} \tag{6}$$

8. *D'après (6), le module du spectre (i.e. le module de la transformée du signal* $z(t)$*) n'est manifestement pas une fonction paire (i.e. symétrique par rapport à* $f = 0$*) ; comment expliquez cela ?*

9. *On cherche maintenant à calculer* $\hat{Z}_1$*. On remarque que* $z(t)$ *peut se mettre sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} & z(t) = z_0(t) + z_1(t) + z_2(t) + z_3(t) + z_4(t) + z_5(t) \\ \text{où} \quad & z_0(t) = \sum_k \mathbf{1}_{[0,1[}(t-6k) \text{et} \quad z_{l+1}(t) = e^{j\frac{\pi}{3}} z_l(t-1) \end{aligned}$$

*où* $z_l$ *sont tous des signaux à valeurs complexes (et non des signaux spécifiques à un voyant). Les signaux* $z_l$ *sont aussi périodiques de période* $6$*. Calculez les coefficients de série de Fourier de* $z_l$ *pour* $k = 1$ *en déduire que*

$$\hat{Z}_1 = \frac{6}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{6}} \sin(\frac{\pi}{6})$$

10. *Pour simplifier les deux questions suivantes, on va supposer que la transformée de Fourier de* $z(t)$ *n'a en fait qu'une raie, à savoir en* $f = 1/6$*. (On rappelle d'ailleurs que le spectre de* $z(t)$ *n'est pas périodique puisque le signal* $z(t)$ *n'est lui-même pas à temps discret). On définit un autre signal complexe défini par* $y(t) = z(t/\tau)$*. Expliquez pourquoi ce signal* $y(t)$ *donne une impression visuelle de rotation. Quelles valeurs doit prendre* $\tau$ *pour donner l'impression d'une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre ? Montrez dans le cadre de l'approximation que le spectre* $y(t)$ *n'a qu'un pic en une fréquence notée* $f_y$ *et calculez* $f_y$ *en fonction de la vitesse de rotation notée* $N$ *et exprimée en tours par minutes.*

11. *Ce panneau est en fait observé par un humain dont l'oeil cligne en moyenne* $25$ *fois par seconde. On modélise ce phénomène en considérant un signal* $u_n$ *qui est l'échantillonnage de* $y(t)$ *à une fréquence* $f_e$*. Quelle est la fréquence d'échantillonnage pertinente pour cette modélisation ? Le critère de Shannon-Nyquist se traduit par l'existence d'une vitesse au-delà de laquelle la lecture de la vitesse de la rotation est ambigüe. Quelle est cette vitesse ? Montrez que le spectre de* $u_n$ *n'a qu'un seul pic dans l'intevalle* $[-f_e/2, f_e/2[$*, (i.e. toujours dans le cadre de l'approximation précédente). La fréquence de ce pic est notée* $f_u$*, exprimez* $f_u$ *en fonction de* $f_y$*. En déduire la vitesse apparente en fonction de la vitesse réelle.*

**Problème 4 (Suréchantillonnage d'un signal)** *(*`104`*)*

*On considère un signal défini par* $x_0 = 1$*,* $x_1 = 0$*,* $x_2 = 1$*,* $x_3 = 0$*, et* $x_n = 0$ *pour* $n$ *différent de* $\{0, 1, 2, 3\}$*. La fréquence d'échantillonnage est* $f_e = 100\text{Hz}$*. La transformée de Fourier de* $x_n$ *vaut* $\hat{X}(f) = 2e^{-j2\pi\frac{f}{f_e}} \cos(\frac{2\pi f}{f_e})$

1. *En observant l'expression de* $\hat{X}(f)$*, on remarque que* $\hat{X}(f)$ *est périodique de période* $\frac{f_e}{2}$*. Faites le calcul. Pourquoi sans faire de calculs, on savait que* $\hat{X}(f)$ *était nécessairement périodique de période* $f_e$ *et pourquoi pour ce signal-là* $\hat{X}(f)$ *est en fait périodique de période* $f_e/2$ *? Pourquoi la périodicité de période* $f_e/2$ *n'est pas contradictoire avec la pérodicité de période* $f_e$ *?*

2. *Dans le diagramme de la figure 5, que vaut* $x_a[n]$ *?*

3. *Que vaut la nouvelle période d'échantillonnage ? Que vaut la nouvelle fréquence d'échantillonnage ?*

4. *Montrez par le calcul que* $\hat{X}_a(f) = \hat{X}(f)$*. Expliquez pourquoi tout se passe comme si* $\hat{X}_a(f) = \hat{X}(f) + \hat{X}(f - f_e) + \hat{X}(f + f_e)$ *?*

L:\t\enseignement_k\tns_m1\problemes\fig104.jpg

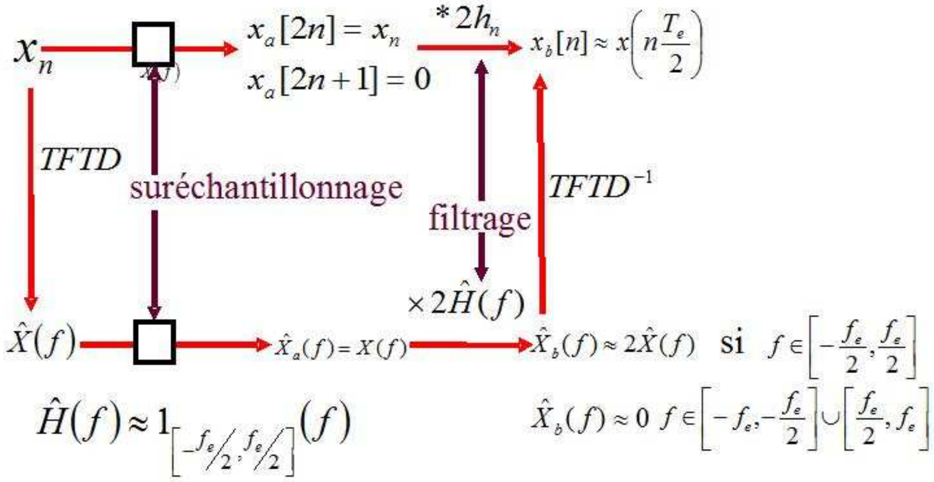


Figure 5: Diagramme

5. *La technique de suréchantillonnage consiste à appliquer un filtre à $x_a[n]$ (voir la figure 5). On choisit pour cela un filtre de réponse impulsionnelle $h_n = \delta_n + \delta_{n-1}$ (c'est-à-dire que $h_0 = 1$ et $h_1 = 1$ et $h_n = 0$ pour $n \neq 0$ et $n \neq 1$). La réponse fréquentielle est alors $\hat{H}(f) = 2e^{-j\pi\frac{f}{2f_e}}\cos(\frac{\pi f}{2f_e})$, quelle est la fréquence de coupure (i.e. la fréquence pour laquelle le module de la réponse fréquentielle vaut $1/\sqrt{2}$ de son maximum) ? Pourquoi est-ce un choix judicieux ?*

6. *Que vaut alors $x_b[n]$ ?*

7. *Que vaut alors $\hat{X}_b(f)$ ?*

8. *Si dans ce diagramme on avait fait le filtrage avant le suréchantillonnage, que se serait-il passé ?*

**Problème 5** *(`105`)*

*On dispose d'une caméra vidéo qui envoie le signal vidéo à une carte disposée dans un ordinateur relié à internet. On cherche à visualiser à distance la vidéo transmise. La caméra délivre 25 image par seconde avec une résolution de 64 par 64 pixels. Chaque pixel est codé sur 256 niveaux de gris. Les différents pixels de chaque image sont transmis les uns derrière les autres sous la forme d'une suite de nombre entre -127 et 128, notée $u_n$.*

1. *Quelle est la période d'échantillonnage ? Quelle est la fréquence d'échantillonnage ? Quel serait le débit de cette liaison internet ?*

*On préfère utiliser qu'un quart de ce débit. Pour cela on sous-échantillonne le signal en ne considérant qu'un nombre tous les 4 nombres. Mathématiquement cela revient à écrire que $v_n = u_{4n}$. En Matlab, on écrirait cela sous la forme :*

```
v=u(1:4:length(u));
```

2. *On note $v(t)$ le signal en temps dont $v_n$ serait l'échantillonnage. $u_n$ peut alors s'interpréter aussi comme l'échantillonnage de $u(t)$ mais à une autre fréquence d'échantillonnage notée $f'_e$. Quelle est cette nouvelle fréquence d'échantillonnage ? D'après le critère de Shannon-Nyquist, quelle condition devrait vérifier $u(t)$ pour qu'à partir de $v_n$ on puisse reconstruire $u(t)$.*

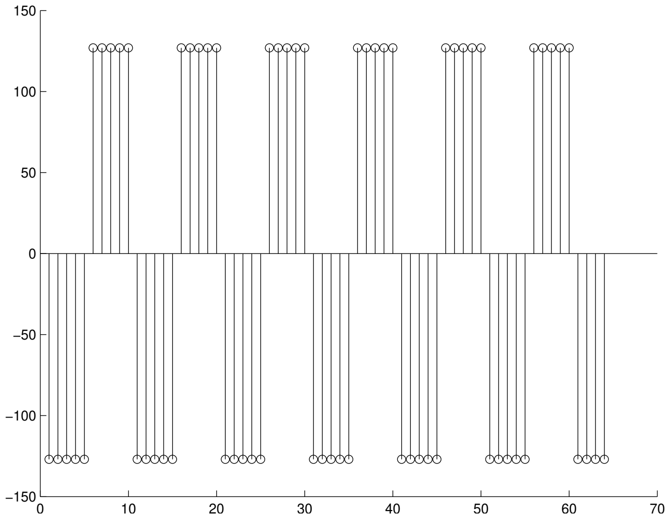


Figure 6: Première ligne d'une image

3. *On cherche à adapter ce raisonnement en considérant maintenant que $u(t)$ est en fait issue d'une image définie par $u(x)$, chaque pixel mesurant $0.3\text{mm}$. On considère une image dont la première ligne est définie par $u(x) = 127\cos(2\pi f_x x)$ avec $x$ en $\text{mm}$. Combien vaut $f_x$ au maximum pour qu'à partir de $v_n$ on puisse reconstruire $u(x)$. L'unité de $f_x$ est en $\text{mm}^{-1}$.*

4. *On considère une image dont la première ligne est définie par $u_n$ qui est une alternance de bande blanche (teinte codée ici à $128$) et de bandes noires (teinte codée ici à $-127$). Les bandes blanches et noires juxtaposées et font chacune 5 pixels. La suite $u_n$ est représentée sur la figure 6. Représenter la suite $v_n$ sur la figure 6. Le critère de Shannon-Nyquist est-il respecté ?*

*On utilise maintenant un filtre anti-repliement de spectre avant de prélever un échantillon sur quatre. Maintenant les données transmises sont $w_n = \frac{1}{4}(u_{4n} + u_{4n-1} + u_{4n-2} + u_{4n-3})$.*

5. *Dessiner $w_n$ sur la figure 6. Pourrait-on reconstruire $u_n$ à partir de $w_n$. Si ce n'est pas $u_n$, que pourrait-on idéalement espérer reconstruire alors ?*

6. *Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre qui a permis de construire $w_n$ à partir de $u_n$ ?*

**Problème 6** *(`106`)*

*On considère un câble coaxial de longueur $L = 10\text{m}$. Le conducteur à l'extérieur est relié à la masse et est à $0\text{V}$. Le conducteur à l'intérieur a une tension notée $u(t,x)$ qui a priori dépend de $x$, la distance entre le point où elle est mesurée et le début du câble. On impose à l'entrée une tension $u(t,0) = e(t)$ et on mesure en sortie $s(t) = u(t,L)$. Lorsqu'il y a une impédance adaptée connectée à la fin du câble qui absorbe effectivement toute l'énergie qui transite par la ligne, alors $u(t,x) = u(t - \frac{x}{c})$. où c est la vitesse de la lumière ($c = 300\,000\text{kms}^{-1}$).*

1. *Montrer que la relation entrée-sortie s'écrit $s(t) = e(t - \frac{L}{c})$.*

2. *Comment appele-t-on cette transformation ?*

3. *Est-ce un filtre linéaire temps-invariant ? Un filtre linéaire signifie que la somme de deux sorties associée à deux entrée est la sortie associée à la somme de deux entrées et la sortie d'un signal amplifié par $\lambda$ est un signal amplifié par $\lambda$. Un filtre linéaire temps-invariant signifie que la sortie associée à un signal retardé de $\tau$ est un signal retardé de $\tau$.*

4. *Quelle est la réponse impulsionnelle ?*

5. *Quelle est la réponse fréquentielle ? Représenter le module de la transformée de Fourier, comment appelle-t-on un tel filtre ?*

**Problème 7** *(*`107`*)*

*On considère un appareil de mesure de température et on étudie l'impact d'un disfonctionnement de l'horloge interne sur les mesures elles-mêmes. La température évolue au cours du temps d'une façon assez imprévisible, cependant tout le monde peut observer qu'il y a des cycles journaliers et annuels et ici on ne modélisera que l'évolution moyenne de la température. Pour simplifier on ne considérera pas les années bissextiles. On modélise la température par*

$$\Theta(t) = A - B\cos(2\pi f_j t) - C\cos(2\pi f_a t) \tag{7}$$

*avec* $t = 0$ *au 31 décembre 2009 à minuit.*

1. *Justifiez la modélisation proposée.*
2. *Que choisir pour* $f_j$ *et* $f_a$ *?*

*On observe que la température moyenne en été est de* $20°$ *et en hiver de* $4°$ *et qu'il y a une amplitude thermique sur la journée de* $14°$*. L'amplitude thermique désigne la différence entre la température du moment le plus chaud avec le moment le plus froid.*

3. *Ecrire les conditions sur* $A$*,* $B$*,* $C$ *pour que le modèle vérifie les informations précédentes. En déduire les valeurs de* $A$*,* $B$*,* $C$*.*

*Lorsqu'il fonctionne bien, l'appareil mesure la température tous les jours à 12 heures.*

4. *Quelle est la fréquence d'échantillonnage ?*
5. *Ecrivez le signal échantillonné ?*
6. *Calculez la transformée de Fourier du signal avant échantillonnage.*
7. *Montrez que le signal échantillonné est en fait périodique, quelle est la période ? On note* $x_n = \Theta(nTe)$*, que vaut* $x_n$ *? Quelle est la période de* $x_n$ *? On note* $N$ *cette période.*
8. *Quelle transformée de Fourier proposez-vous d'utiliser ?*
9. *Calculez la transformée de Fourier, où sont les pics de fréquences ?*
10. *Décrire en utilisant les notions de traitement de signal ce qui s'est passé du fait de l'échantillonnage ?*

*L'horloge interne retarde de* $2$ *minutes chaque jour.*

11. *Quel est le nouveau signal mesuré ?*
12. *Quelle est sa transformée de Fourier*
13. *Décrire avec les outils du traitement de signal ce qui se passe.*

# 2 Deuxième partie du cours

**Problème 8** *(*`108`*)*

*On cherche à nettoyer des données au moyen d'un filtre numérique. La fréquence d'échantillonnage utilisée ici est de* $100\text{Hz}$*. Les données sont sur un spectre contenu dans* $[0, 10\text{Hz}]$*. Elles sont malheureusement parasitées par un bruit additif de fréquence* $25\text{Hz}$*. L'objectif est de construire un filtre qui permette de retirer une partie de ce bruit additif puis de l'appliquer aux données et de mesurer au moyen de la somme des carrés des différences si effectivement le bruit additif a été retiré sans que le signal n'ait été déterioré.*

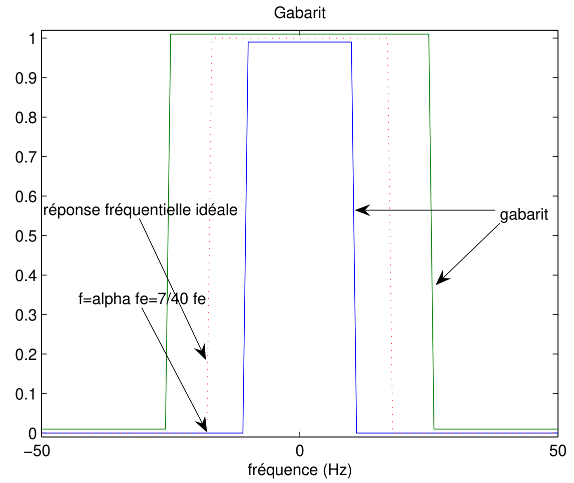


Figure 7: Gabarit

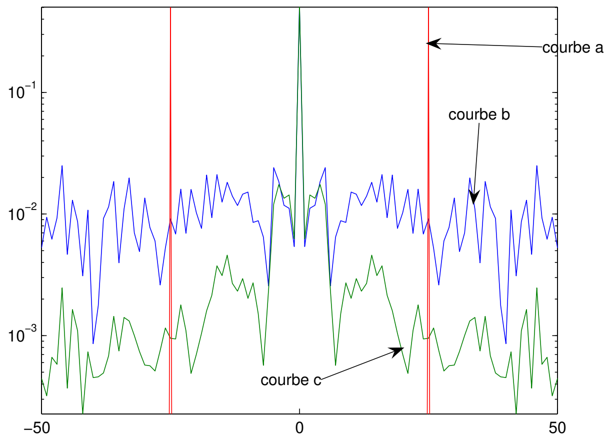


Figure 8: Données simulées

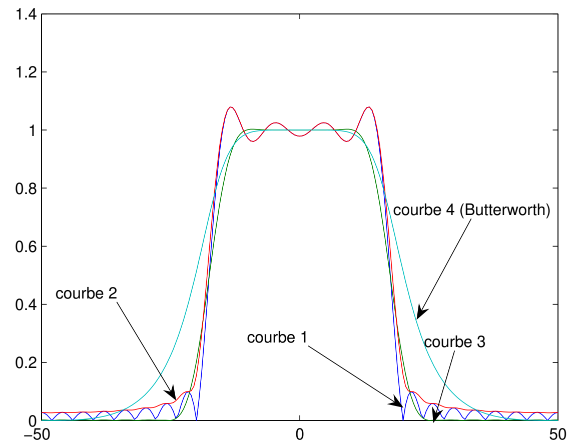


Figure 9: Réponses fréquentielles de filtres à réponses impulsionnelles finies ($N = 12$) et du filtre de Butterworth.

*Les données sources sont construites à partir de données aléatoires suivant une loi uniforme entre* $0$ *et* $1$*, ces données aléatoires sont ensuite filtrées par un moyenneur sur* $10$ *pas de temps et forment ainsi les données sources. Ainsi les données sources sont données par* $s_n = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} t_{n-k}$ *où* $t_n$ *est la réalisation à chaque pas de temps de cette loi uniforme sur* $[0,1]$*. Le bruit* $b_n$ *est l'échantillonnage de* $\cos(2\pi 25t)$ *à* $100\text{Hz}$*. Les données à traiter sont donc* $s_n + b_n$*.*

1. *La figure 8 présente trois courbes qui sont les modules des transformées de Fourier de* $s_n$*,* $b_n$ *et* $t_n$*. Indiquez à quelles courbes correspondent ces trois signaux. Justifiez.*

2. *La figure 7 indique le gabarit du filtre souhaité, justifiez ce choix.*

3. *Pour réaliser un filtre à réponse impulsionnelle idéale, on se donne un spectre idéal indiqué en pointillé sur la figure 7, justifiez ce choix de spectre idéal.*

4. *Choisissez un des trois filtres suivants et montrez comment on peut le déduire du gabarit choisi, (on pourra s'aider de l'équation (15)). Indiquez précisément les différentes étapes.*

$$h_n = \frac{\sin(2\pi\alpha(n-N))}{\pi(n-N)}\mathbf{1}_{\{0..2N\}} \text{ et } h_N = 2\alpha \tag{8}$$

$$h_n = \left(1 - \frac{|n-N|}{N+1}\right)\frac{\sin(2\pi\alpha(n-N))}{\pi(n-N)}\mathbf{1}_{\{0..2N\}} \text{ et } h_N = 2\alpha \tag{9}$$

$$h_n = \left(0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi(n-N)}{2N}\right)\right)\frac{\sin(2\pi\alpha(n-N))}{\pi(n-N)}\mathbf{1}_{\{0..2N\}} \text{ et } h_N = 2\alpha \tag{10}$$

*avec* $\alpha f_e$ *la fréquence caractéristique du spectre idéal (voir figure 7) et* $2N+1$ *la taille du filtre obtenu.*

5. *Les réponses fréquentielles de ces trois filtres sont montrées successivement sur la figure 9 pour* $N = 12$*. Qu'est-ce que cette figure nous apprend sur l'utilité ici des fenêtres ?*

6. *Expliquez plus généralement l'utilité des fenêtres pour la synthèse de filtres à réponse impulsionnelle finie.*

7. *On cherche maintenant à synthétiser à l'aide d'un filtre de Butterworth à l'ordre* $3$ *(pour simplifier, vous pouvez choisir de le calculer à l'ordre* $1$ *ou à l'ordre* $2$*). On cherche à ce que la fréquence de coupure du filtre numérique résultat ait sa fréquence de coupure en* $f = \alpha f_e = \frac{7}{40} f_e$*. Montrez que l'on obtient alors*

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{(1+2\beta+2\beta^2+\beta^3) + (3+2\beta-2\beta^2-3\beta^3)z^{-1} + (3-2\beta-2\beta^2+3\beta^3)z^{-2} + (1-2\beta+2\beta^2-\beta^3)z^{-3}} \tag{11}$$

*avec* $\beta = \frac{1}{\tan(\pi\alpha)}$*.*

8. *Montrez que le module de la réponse fréquentielle du filtre trouvée est*

$$\left|\hat{H}^{\#}(f^{\#})\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^6 \tan^6(\frac{\pi f^{\#}}{f_e})}} \tag{12}$$

*Pour cela on pourra montrer que le filtre de Butterworth à l'ordre* $3$ *a pour module de réponse fréquentielle* $\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f)^6}}$*, puis que la transformation réalisée est* $2\pi f = \beta\tan(\frac{\pi f^{\#}}{f_e})$*. Cette réponse fréquentielle est la courbe* $4$ *de la figure 9.*

9. *Montrez alors que* $f^{\#} = \pm\alpha f_e$ *sont des fréquences de coupure du filtre ainsi défini.*

10. *Expliquez comment à partir de (12) on pouvait déduire la forme générale du module de la réponse fréquentielle telle qu'elle est représentée sur la figure 9.*

11. *On veut savoir si le filtrage a été efficace, on souhaite le mesurer sur les données. On note* $y_n^k$ *les résultats des filtrages de* $s_n + b_n$ *par chacun des quatre filtres. On calcule* $E^k$ *l'expression suivante*

$$E^k = \frac{\sum_{n \leq Tf_e} (y_n^k - s_n)^2}{\sum_{n \leq Tf_e}} \tag{13}$$

*où* $T$ *est la durée de l'expérience. Quel est l'intérêt de calculer cette quantité ? Pourquoi considère-t-on que le meilleur filtre est celui qui minimise cette quantité ?*

12. *Les résultats trouvés pour une expérience dont les signaux sont de durée* 50s *sont* $E^1 = 0.0190$, $E^2 = 0.0197$, $E^3 = 0.0172$, $E^4 = 0.0269$. *Commentez ces résultats.*

13. *Si on recommence l'expérience trouverait-on les mêmes résultats ? Commentez sur la durée de l'expérience.*

14. *Que pourrait-on proposer pour améliorer ces résultats ?*

15. *Proposez une autre idée permettant de mesurer dans quelle mesure le filtre a retiré du bruit aux données.*

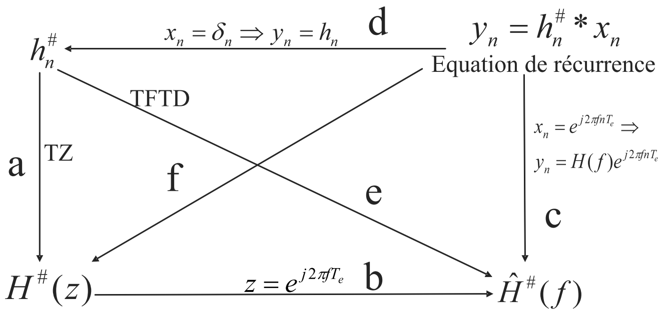


Figure 10: Diagramme

En utilisant les transformations usuelles (retard et produit), on calcule les transformées de Fourier des signaux suivants.

$$y_{t_1,t_2,f_0,\phi}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)\mathbf{1}_{[t_1,t_2]}(t) \tag{14}$$

$$\hat{Y}_{t_1,t_2,f_0,\phi}(f) = \frac{e^{j\phi}}{2} \frac{\sin\left(\pi(f-f_0)(t_2-t_1)\right)}{\pi(f-f_0)} e^{-j\pi(f-f_0)(t_1+t_2)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} \frac{\sin\left(\pi(f+f_0)(t_2-t_1)\right)}{\pi(f+f_0)} e^{-j\pi(f+f_0)(t_1+t_2)} \tag{15}$$

$$z_{n_1,n_2,f_0,\phi}[n] = \cos(2\pi f_0 n T_e + \phi)\mathbf{1}_{\{n_1 \dots n_2\}}(n) \tag{16}$$

$$\hat{Z}_{n_1,n_2,f_0,\phi}(f) = \frac{e^{j\phi}}{2} e^{-j\pi\frac{f-f_0}{f_e}(n_1+n_2)} \frac{\sin\left(\pi\frac{f-f_0}{f_e}(n_2-n_1+1)\right)}{\sin\left(\pi\frac{f-f_0}{f_e}\right)} + \frac{e^{-j\phi}}{2} e^{-j\pi\frac{f+f_0}{f_e}(n_1+n_2)} \frac{\sin\left(\pi\frac{f+f_0}{f_e}(n_2-n_1+1)\right)}{\sin\left(\pi\frac{f+f_0}{f_e}\right)} \tag{17}$$

**Problème 9** *(*`109`*)*

*On considère un radar autoroutier utilisant la bande de fréquence Ku (ici* 15GHz, 2cm*) avec une bande spectrale de* 100MHz. *Il est fixe sur le bord de la route et fait presque face aux véhicules avec une orientation de* $\alpha = 22,5^\circ$ *et une ouverture de* $5^\circ$. *Il est censé pouvoir mesurer sans ambiguité pour des distances inférieures à* 500m *et supérieures à* 10m. *et des vitesses inférieures à* 200km. *Ce radar utilise une série de pulse à intervalles réguliers.*

1. *Si on augmentait significativement la fréquence, pourquoi est-ce que l'humidité pourrait affecter le fonctionnement du radar ?*

2. *Pourquoi si on oriente le radar perpendiculairement à la route, celui-ci ne fonctionne plus ?*

3. *Pourquoi la vitesse mesurée par le radar est-elle inférieure à la vitesse réelle de la voiture ? (La vraie relation est* $v_{radar} = \cos(\alpha) v_{véhicule}$*). En fait* $\cos(\alpha) = 0.92$ *aussi on peut approcher la vitesse mesurée par le radar de la vitesse du véhicule pour calculer des ordres de grandeurs des caractéristiques du radar.*

4. *Pourquoi est-ce que le temps de la mesure* $t_m$ *(temps pendant lequel le véhicule est observé par le radar) est déterminée par la vitesse du véhicule* $v_v$*, l'angle d'ouverture, l'orientation du radar et par la distance entre le radar et le centre de la route* $d_r$ *? Montrez cela sur un schéma. (En fait le temps de mesure est donnée par* $\frac{d_r \Delta\alpha}{v_v \sin(\alpha)} \approx 0.1\mathrm{s}$*).*

5. *A partir de la distance maximale, donnez une condition sur l'espacement entre les pulses* $t_e$ *?*

6. *A partir de la distance minimale, donnez une condition sur la durée d'un pulse* $t_p$ *?*

7. *A partir de l'effet Doppler, quel est le décalage en fréquence observé ? Le véhicule fait face au radar, aussi la fréquence de l'ondre retournée est-elle plus faible ou plus élevée que l'onde émise ?*

8. *A partir de la vitesse maximale, donnez une autre condition sur l'espacement entre les pulses* $t_e$ *?*

9. *On fixe* $t_e = 50\mu\mathrm{s}$ *et* $t_p = 50\mathrm{ns}$*. Connaissant la durée pendant laquelle on peut faire la mesure* $t_m \approx 0.2\mathrm{s}$*, de combien de points de mesures de la position du véhicule disposons-nous pour estimer cette vitesse ?*

10. *Le pulse émis est ici une sinusoïde, étant donné la durée du pulse peut-on considérer que celui-ci est contenu dans la bande limitée de* $100\mathrm{MHz}$ *autour de* $15\mathrm{GHz}$ *?*