

Traitement du signal

Gabriel Dauphin

July 10, 2026

Contents

A	Rappel sur les complexes	2
A.1	Écriture d'un complexe	2
A.2	Représentation angulaire de complexes de module 1	2
A.3	Module et argument d'un complexe	2
A.3.1	Argument d'un complexe	3
A.3.2	Module d'un complexe	3
B	Justification des égalités de Parseval	4
B.1	Cas d'un signal temps continu non-périodique	4
B.2	Cas d'un signal temps continu et périodique	4
B.3	Cas d'un signal temps discret non-périodique	5
B.4	Cas d'un signal temps discret périodique	6
C	Exemple de calculs	8
C.1	Calcul de la transformée de Laplace inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double	8
C.2	Exemple de calcul de la transformée en Z inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double	8
D	Trouver les paramètres d'un signal sinusoïdal ajouté à une composante continue	10
E	Exemple de correction d'exercices	12
E.1	Énoncé	12
E.2	Correction	12
E.2.1	Question 1	12
E.2.2	Question 2	13
E.2.3	Question 3	13
F	Calcul avec les intégrales et les fonctions caractéristiques	15
G	Différentes techniques pour représenter le module d'une réponse fréquentielle	16
G.1	$ \hat{H}(f) = 1 + e^{j\alpha f} $	16
G.2	$ \hat{H}(f) = 1 + e^{j\alpha f} $	16
H	Bibliographie	17

Appendix A

Rappel sur les complexes

A.1 Écriture d'un complexe

Dans le cadre de ce cours, on note j , le complexe imaginaire dont le carré vaut -1 .

$$j^2 = -1$$

Les complexes sont notés

$$z = a + jb$$

a est la partie réelle de z notée $\Re(z)$ et b est la partie imaginaire de z notée $\Im(z)$. On peut interpréter un complexe comme un point dans un plan dont la première coordonnée est a et la deuxième coordonnée est b .

A.2 Représentation angulaire de complexes de module 1

Certains complexes peuvent s'écrire comme

$$z = e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

θ est l'argument de ce complexe, il est aussi appelé parfois la phase. Quand $z = 0$, cet argument n'est pas défini ¹. Parmi ces complexes, on trouve

$$\begin{aligned} e^{j0} &= 1 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} &= j \\ e^{j\pi} &= -1 \\ e^{j\frac{3\pi}{2}} &= -j \\ e^{j2\pi} &= 1 \end{aligned}$$

Avec l'interprétation géométrique, tous ces complexes sont sur le cercle unité de centre 0 et de rayon 1.

A.3 Module et argument d'un complexe

Tous les complexes s'écrivent ²

$$z = re^{j\theta}, \text{ avec } \theta \in [-\pi, \pi[$$

On note $r = |z|$ c'est ce qu'on appelle le module de z . On note $\theta = \arg(z)$, c'est ce qu'on appelle l'argument.

¹En effet pour tout θ , $0 = 0e^{j\theta}$.

²Il existe différentes conventions pour définir $\arg(z)$.

A.3.1 Argument d'un complexe

On dispose de règles de calcul. Il existe k entier positif ou négatif tel que ³

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) - 2k\pi \quad (\text{A.1})$$

Il est possible de déterminer l'argument en fonction du complexe.

$$\arg(a + jb) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, b > 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a < 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Ce calcul est implémenté dans Matlab/Octave avec la fonction **angle**. Dans le cadre de cette formation, on ne cherche pas à déterminer exactement l'argument et on se contente de déterminer cet argument modulo π .

Il existe k entier positif ou négatif

$$\arg(a + jb) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + k\pi$$

A.3.2 Module d'un complexe

On dispose de règles de calcul

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ et } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Il est possible de déterminer l'argument en fonction du complexe.

$$|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

³Dans l'équation (A.1), on n'a pas toujours l'égalité parfois il y a une différence qui est un multiple de 2π . Ainsi $0 = \arg(1) = \arg(jjjj) = (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) - 2\pi$.

Appendix B

Justification des égalités de Parseval

Il s'agit ici de montrer le lien entre les égalités de Parseval et le reste du cours de traitement numérique du signal.

B.1 Cas d'un signal temps continu non-périodique

L'égalités de Parseval peut se voir comme un cas particulier du fait que le spectre associé à un signal qui résulte d'un produit de convolution de deux signal est le produit des spectres de ces deux signaux.

Considérons un signal $x(t)$ temps continu et non-périodique. L'énergie de ce signal est donné par (??) dans la section ?? (p. ??) :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

La section ?? (p. ??) affirme (??) :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{X}(f)|^2 df$$

Il est assez simple de montrer le lien avec le produit de convolution. Soit $y(t) = x(-t)$, alors le changement de variable $t' = -t$ montre que

$$\hat{Y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} y(-t') e^{j2\pi ft'} (-dt') = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{j2\pi ft'} dt' = \overline{\hat{X}(f)}$$

Soit $z(t) = x(t) * y(t)$. Alors

$$z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\tau) d\tau = E_x$$

Du fait des propriétés de la transformée de Fourier et du produit de convolution,

$$z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Z}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f) \hat{Y}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f) \overline{\hat{X}(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{X}(f)|^2 df$$

B.2 Cas d'un signal temps continu et périodique

Soit $x(t)$ un signal temps continu et périodique de période T . Dans la section ??, (p. ??), la puissance s'exprime ainsi (??) :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Dans la section ??, (p. ??), la puissance s'exprime aussi en fonction des coefficients de la transformée de Fourier :

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{X}_k|^2$$

La justification utilise ici le fait que les exponentielles complexes forment en quelque sorte une base des fonctions périodiques.

1. $x(t)$ s'exprime en fonction de $\widehat{X}_k$ au moyen de la transformée de Fourier inverse (??)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{X}_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

2. Les différentes exponentielles complexes forment une base orthonormée pour le produit scalaire généralement utilisé pour les fonctions périodiques :

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{j2\pi k \frac{t}{T}} e^{-j2\pi l \frac{t}{T}} dt = \delta_{k-l}$$

Ce résultat se démontre en explicitant la primitive qui est, soit t lorsque $k = l$, soit $\frac{T}{j2\pi(k-l)} e^{j2\pi(k-l)\frac{t}{T}}$ qui est une fonction périodique. Le calcul de l'intégrale donne 1 dans le premier cas et 0 dans l'autre cas.

3. La propriété (??) énoncée p. ?? section ?? indique que :

$$\widehat{X}_{-k} = \overline{\widehat{X}_k}$$

4. Ces propriétés permettent de faire le calcul suivant.

D'après la propriété 1

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{X}_k \widehat{X}_l e^{j2\pi(k+l)\frac{t}{T}} \right) dt$$

D'après la propriété 2

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{X}_k \widehat{X}_{-k}$$

D'après la propriété 3

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{X}_k \overline{\widehat{X}_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{X}_k|^2$$

B.3 Cas d'un signal temps discret non-périodique

Soit x_n un signal temps discret non-périodique. Soit T_e la période d'échantillonnage et f_e la fréquence d'échantillonnage. Dans la section ??, (p. ??), l'énergie s'exprime ainsi (??) :

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2$$

Dans la section ??, (p. ??), la puissance s'exprime aussi en fonction des coefficients de la transformée de Fourier :

$$E = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\widehat{X}(f)|^2 df$$

La justification se fait exactement de la même façon que pour la section B.2, il n'y a que les notations qui changent.

1. $\widehat{X}(f)$ s'exprime en fonction de x_n au moyen de la transformée de Fourier à temps discret (??)

$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_e}$$

2. Les différentes exponentielles complexes forment une base orthonormée pour le produit scalaire généralement utilisé pour les fonctions périodiques :

$$\frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} e^{j2\pi k f T_e} e^{-j2\pi l f T_e} df = \delta_{k-l}$$

Ce résultat se démontre en explicitant la primitive qui est, soit f lorsque $k = l$, soit $\frac{1}{j2\pi T_e(k-l)} e^{j2\pi(k-l)fT_e}$ qui est une fonction périodique. Le calcul de l'intégrale donne 1 dans le premier cas et 0 dans l'autre cas.

3. Comme le signal x_n est à valeurs réelles, le conjugué de la transformée de Fourier s'exprime ainsi :

$$\overline{\widehat{X}(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi f n T_e}$$

4. Ces propriétés permettent de faire le calcul suivant.

D'après les propriétés 1 et 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\widehat{X}(f)|^2 df &= \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{X}(f) \overline{\widehat{X}(f)} df \\ &= \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_m e^{-j2\pi f m T_e} x_n e^{j2\pi f n T_e} df \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\widehat{X}(f)|^2 df = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_m x_n e^{-j2\pi f(m-n)T_e} df$$

D'après la propriété 2

$$\frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\widehat{X}(f)|^2 df = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m x_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^2$$

B.4 Cas d'un signal temps discret périodique

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N . Soit T_e la période d'échantillonnage et f_e la fréquence d'échantillonnage. Dans la section ??, (p. ??), la puissance s'exprime ainsi (??) :

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2$$

Dans la section ??, (p. ??), d'après (??), la puissance s'exprime aussi en fonction des coefficients de la transformée de Fourier :

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{X}_k|^2$$

La justification est un peu différente car elle utilise le produit scalaire généralement utilisé pour les suites périodiques.

1. $\widehat{X}_k$ s'exprime en fonction de x_n au moyen de la transformée de Fourier discrète (??)

$$\widehat{X}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

2. Les différentes exponentielles complexes forment une base orthonormée pour le produit scalaire généralement utilisé pour les suites périodiques :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{kn}{N}} e^{-j2\pi \frac{ln}{N}} = \delta_{k-l}$$

- Si $k = l$, alors le terme de la série est 1 et la somme normalisée vaut 1.
- Si $k \neq l$, cette expression s'interprète comme la somme d'une suite géométrique

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(k-l)n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi \frac{(k-l)}{N}} \right)^n = \frac{1 - \left(e^{j2\pi \frac{(k-l)}{N}} \right)^N}{1 - \left(e^{j2\pi \frac{(k-l)}{N}} \right)} = \frac{1 - e^{j2\pi(k-l)}}{1 - e^{j2\pi \frac{(k-l)}{N}}} = 0$$

Le numérateur de la dernière expression est nul parce que $k - l$ est un entier.

3. Comme le signal x_n est à valeurs réelles, le conjugué de la transformée de Fourier discrète s'exprime ainsi :

$$\overline{\hat{X}_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

4. Ces propriétés permettent de faire le calcul suivant.

D'après les propriétés 1 et 3

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{X}_k \right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_k \overline{\hat{X}_k} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi \frac{km}{N}} x_n e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{X}_k \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{k(m-n)}{N}} \right)$$

D'après la propriété 2

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{X}_k \right|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \delta_{n-m} \right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m^2$$

Appendix C

Exemple de calculs

C.1 Calcul de la transformée de Laplace inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double

On s'intéresse ici à

$$H(p) = \frac{p-1}{(p+1)^2}$$

Le dénominateur est un polynôme qui a une racine double en $p = -1$. La décomposition en élément simple du polynôme se fait en cherchant a et b tel que

$$H(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2} = \frac{b+a(p+1)}{(p+1)^2} = \frac{(b+a) + ap}{(p+1)^2}$$

Cette décomposition se fait avec $a = 1$ et $b = -2$.

$$H(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}$$

L'utilisation de (??), p. ??, donne

$$h(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t) - 2te^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t) = (1-2t)e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)$$

C.2 Exemple de calcul de la transformée en Z inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double

On cherche ici à calculer la transformée en Z inverse de

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}$$

Le dénominateur contient une racine double en $z = -1$. Aussi en application de (??), p. ??, il existe a et b tel que

$$h_n = (an+b)(-1)^n\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$$

La relation entrée-sortie associée à cette fonction de transfert est

$$y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = x_n - x_{n-1} \tag{C.1}$$

On place en entrée $x_n = \delta_n$. L'application de (C.1) pour $n = 0$ montre qu'alors $y_0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 1 - 1 \times 0$ et donc $y_0 = 1$. L'application de (C.1) pour $n = 1$ montre qu'alors $y_1 + 2y_0 + 1 \times 0 = 1 \times 0 - 1$ et donc $y_1 = -3$. Les valeurs de y_n sont celles de h_n et par suite ces calculs permettent d'en déduire les valeurs de a et de b :

$$\begin{aligned} (a \times 0 + b) \times 1 &= h_0 = 1 \Rightarrow b = 1 \\ (a \times 1 + b) \times (-1) &= h_1 = -3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

Par ailleurs h_n vérifie (C.1) pour $n \geq 2$ lorsque $x_n = \delta_n$:

$$\begin{aligned} y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} &= (2n+1)(-1)^n + 2(2(n-1)+1)(-1)^{n-1} + (2(n-2)+1)(-1)^{n-2} \\ y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} &= (2n+1+2n-3-4n+2)(-1)^{n-1} = 0 = \delta_n - \delta_{n-1} = x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

On a finalement bien prouvé que

$$h_n = (2n+1)(-1)^n \mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$$

Appendix D

Trouver les paramètres d'un signal sinusoïdal ajouté à une composante continue

L'objectif est de trouver les valeurs de a, b, f_0, φ à partir de la courbe représentative du signal temps continu ainsi défini :

$$x(t) = a + b \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Sur la courbe représentative du signal, on cherche à mesurer les valeurs suivantes :

- $\max x(t)$: valeur du maximum du signal
- $\min x(t)$: valeur du minimum du signal
- T : période du signal
- $\tau = \arg \max x(t)$: un instant où le signal est maximal

Ces quantités sont illustrées sur la figure [D.1](#). Elles permettent d'en déduire les quantités à retrouver.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \frac{\max x(t) + \min x(t)}{2} \\ b & = & \frac{\max x(t) - \min x(t)}{2} \\ f_0 & = & \frac{1}{T} \\ \tau & = & \arg \max x(t) \\ \varphi & = & -2\pi f_0 \tau \end{array} \right.$$

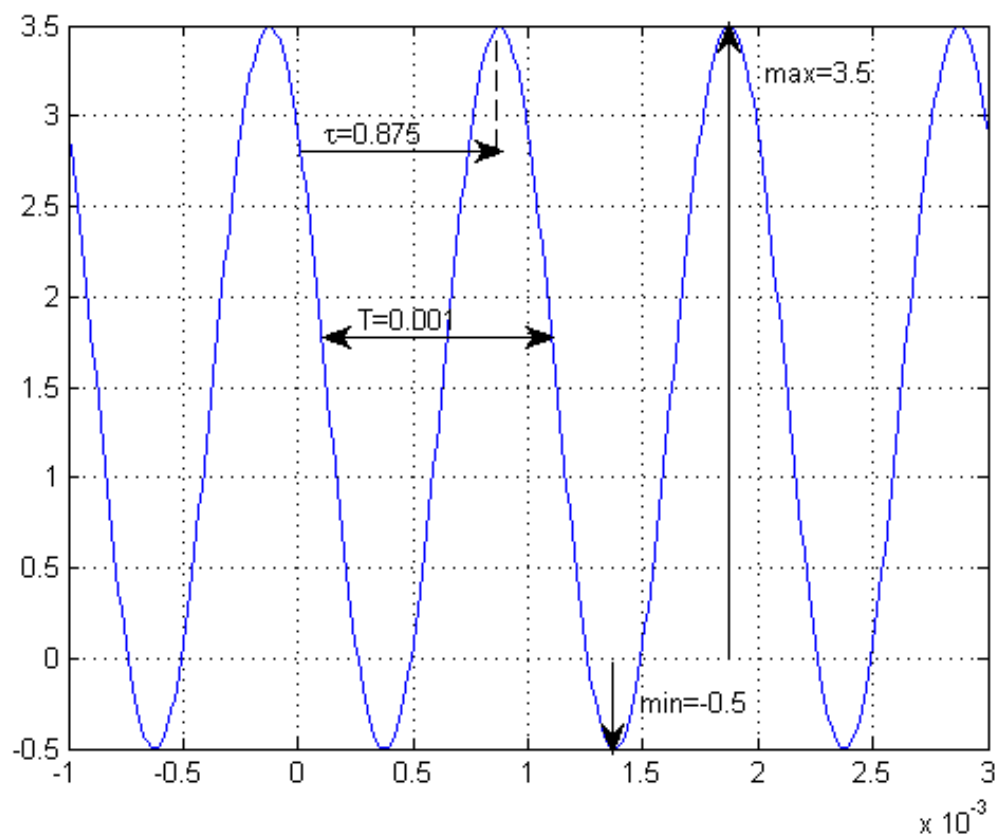


Figure D.1: Signal sinusoïdal ajouté à une composante continue.

Appendix E

Exemple de correction d'exercices

E.1 Énoncé

On cherche à estimer l'impact de l'utilisation d'une fenêtre triangulaire pour synthétiser un filtre passe-bas. On suppose que l'on considère des signaux échantillonnés à f_e et que l'on a réalisé la synthèse d'un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure f_c , avec une réponse impulsionnelle causale qui contient $2N + 1$ termes non-nuls. La fenêtre rectangulaire est donnée par

$$r_n = \mathbf{1}_{\{-N \dots N\}}[n]$$

Elle a pour transformée de Fourier à temps discret

$$\hat{R}(f) = \frac{\sin(\pi(N+1)fT_e)}{\sin(\pi fT_e)}$$

La fenêtre triangulaire est donnée par

$$t_n = \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \mathbf{1}_{\{-N \dots N\}}[n]$$

Elle a pour transformée de Fourier à temps discret

$$\hat{T}(f) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(\pi(N+1)fT_e)}{\sin^2(\pi fT_e)}$$

Question 1 Montrez que la réponse fréquentielle du filtre synthétisé est donnée par

$$\begin{aligned}\hat{H}_R(f) &= \frac{1}{f_e} \int_{f-f_c}^{f+f_c} \hat{R}(\nu) d\nu \\ \hat{H}_T(f) &= \frac{1}{f_e} \int_{f-f_c}^{f+f_c} \hat{T}(\nu) d\nu\end{aligned}$$

Question 2 Donnez la largeur des lobes du sinus cardinal en terme de bande de fréquences et montrez que si N est grand devant f_e/f_c alors la largeur de ces lobes est petite devant f_c .

Question 3 En utilisant cette approximation (N grand devant f_e/f_c), montrez que

$$\hat{H}_R(f_c) \approx \hat{H}_T(f_c) \approx \frac{1}{2}$$

E.2 Correction

E.2.1 Question 1

Je démontre d'abord le fait que pour deux signaux à temps discret a_n et b_n de transformée de Fourier à temps discret $\hat{A}(f)$ et $\hat{B}(f)$

$$a_n b_n = \text{TFTD}^{-1} \left[\frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \hat{A}(f_1) \hat{B}(f - f_1) df_1 \right] \quad (\text{E.1})$$

Du fait des définitions de $\widehat{A}(f)$ et $\widehat{B}(f)$,

$$a_n b_n = \text{TFTD}^{-1}[\widehat{A}(f)] \text{TFTD}^{-1}[\widehat{B}(f)]$$

J'utilise les définitions de la TFTD et j'utilise deux variables d'intégration différentes

$$a_n b_n = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{A}(f_1) e^{j2\pi f_1 n T_e} df_1 \times \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{B}(f_2) e^{j2\pi f_2 n T_e} df_2$$

Ce produit d'intégrale peut se voir comme une intégrale double et je fais le changement de variable $f_1 = f_1$ et $f = f_1 + f_2$

$$a_n b_n = \frac{1}{f_e^2} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \int_{f_1 - \frac{f_e}{2}}^{f_1 + \frac{f_e}{2}} \widehat{B}(f - f_1) e^{j2\pi(f-f_1)nT_e} df \widehat{A}(f_1) e^{j2\pi f_1 n T_e} df_1$$

La fonction $f \mapsto \widehat{B}(f - f_1) e^{j2\pi(f-f_1)nT_e}$ étant périodique de période f_e cela me permet de changer les bornes de la deuxième intégrale

$$a_n b_n = \frac{1}{f_e^2} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{B}(f - f_1) e^{j2\pi(f-f_1)nT_e} df \widehat{A}(f_1) e^{j2\pi f_1 n T_e} df_1$$

Après simplification des deux exponentielles complexes en une seule on retrouve (E.1).

Je pose h_n la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal de réponse fréquentielle $\widehat{H}(f) = \mathbf{1}_{[-f_c, f_c]}(f)$ sur l'intervalle $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$. Ensuite l'application de (E.1) montre que :

$$r_n h_n = \text{TFTD}^{-1} \left[\frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(f_1) \widehat{H}(f - f_1) df_1 \right]$$

L'application de TFTD à cette équation et d'autre part le fait d'utiliser la définition de $\widehat{H}(f - f_1)$ montre que

$$\text{TFTD}[h_n r_n] = \widehat{H}_R(f) = \frac{1}{f_e} \int_{f-f_c}^{f+f_c} \widehat{R}(f_1) df_1$$

Enfin l'application de (E.1) montre que :

$$t_n h_n = \text{TFTD}^{-1} \left[\frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{T}(f_1) \widehat{H}(f - f_1) df_1 \right]$$

L'application de TFTD à cette équation et d'autre part le fait d'utiliser la définition de $\widehat{H}(f - f_1)$ montre que

$$\text{TFTD}[h_n t_n] = \widehat{H}_T(f) = \frac{1}{f_e} \int_{f-f_c}^{f+f_c} \widehat{T}(f_1) df_1$$

E.2.2 Question 2

La fonction $f \mapsto \sin(\pi(N+1)fT_e)$ s'annule en tous les multiples de $\frac{f_e}{N+1}$ sauf en $f = 0$. Aussi les lobes de $\widehat{R}(f)$ et de $\widehat{T}(f)$ sont de largeur $\frac{f_e}{N+1}$, sauf le lobe central qui est deux fois plus large.

Quand N est grand devant f_e/f_c alors $\frac{f_e}{(N+1)f_c}$ est petit devant 1 et $\frac{f_e}{N+1}$ est petit devant f_c .

E.2.3 Question 3

Dans un premier temps je considère $f_c \leq \frac{f_e}{4}$.

$$\widehat{H}_R(f_c) = \frac{1}{f_e} \int_0^{2f_c} \widehat{R}(\nu) d\nu \approx \frac{1}{f_e} \int_0^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu) d\nu$$

L'approximation est justifié par le fait que $\widehat{R}(\nu)$ est faible sur l'intervalle $[2f_c, f_e/2]$ parce que les lobes sont petits devant f_c . Par ailleurs $\widehat{R}(\nu) = |\widehat{R}(\nu)|$ est une fonction paire

$$\frac{1}{f_e} \int_0^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu) d\nu = \frac{1}{2} \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu) d\nu = \frac{1}{2} r[0] = \frac{1}{2}$$

En reliant les deux équations, on trouve l'approximation demandée.

Dans une deuxième temps je considère $f_c \geq \frac{f_e}{4}$ avec toujours $f_c < \frac{f_e}{2}$. J'utilise une autre approximation N grand devant $\frac{f_e}{f_e - 2f_c}$. La périodicité de $\widehat{R}$ montre que :

$$\widehat{H}_R(f_c) = \frac{1}{f_e} \int_0^{2f_c} \widehat{R}(\nu) d\nu = \frac{1}{f_e} \int_0^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu) d\nu + \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{2f_c - f_e} \widehat{R}(\nu) d\nu$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, le premier terme vaut $\frac{1}{2}$. L'approximation considérée maintenant permet d'affirmer que les lobes ont une largeur petite devant $f_e - 2f_c < f_e/2$ et que donc $\widehat{R}(\nu)$ est faible sur l'intervalle $[f_e - 2f_c, \frac{f_e}{2}]$, ce qui par symétrie signifie aussi que $\widehat{R}(\nu)$ est faible sur l'intervalle $[-\frac{f_e}{2}, 2f_c - f_e]$. Le deuxième terme est donc de valeur faible. Ainsi se trouve justifié l'approximation dans le deuxième cas.

Le raisonnement est le même pour $\widehat{H}_T(f_c)$.

Appendix F

Calcul avec les intégrales et les fonctions caractéristiques

On appelle fonction caractéristique

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Quand A est un intervalle, la fonction caractéristique est en fait une porte.

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Il est possible de déplacer les termes au sein de la définition de la fonction caractéristique sur un intervalle

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \mathbf{1}_{[a-t,b-t]}(0) = \mathbf{1}_{[0,b-a]}(t-a) \quad (\text{F.3})$$

Cette fonction permet de transformer une intégrale sur un intervalle en une intégrale sur $\mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,b]}(t) f(t) dt \quad (\text{F.4})$$

L'intégrale de cette fonction porte est

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(t) dt = b - a \quad (\text{F.5})$$

Le centre de cette fonction porte est

$$\int_{\mathbb{R}} t \mathbf{1}_{[a,b]}(t) dt = \frac{a+b}{2} \quad (\text{F.6})$$

Appendix G

Différentes techniques pour représenter le module d'une réponse fréquentielle

Les simulations numériques permettent de visualiser rapidement le module de la réponse fréquentielle d'un filtre. Cela étant il peut être intéressant d'avoir quelques techniques permettant dans certains cas simples d'en obtenir aussi une allure.

G.1 $|\widehat{H}(f)| = |1 + e^{j\alpha f}|$

G.2 $|\widehat{H}(f)| = |1 + e^{j\alpha f}|$

Appendix H

Bibliographie

Dans le livre [?], les probabilités sont présentées dans l'annexe A. Le traitement du signal se trouve dans l'annexe B et dans les sections 2.3, 2.4.1 et 2.5 du chapitre 2. La psychoacoustique est présentée en section 2.2.3 du chapitre 2. Le traitement du son se trouve dans les sections 2.2, 2.4 et 2.5 du chapitre 2 et la section 12.3 du chapitre 12.

Dans le livre [?], le traitement du signal est présenté dans les chapitres 1 et 2. En particulier la synthèse des filtres est faite différemment. La psychoacoustique est présentée dans l'annexe C.

Dans le livre [?], le traitement du signal est présenté dans le chapitre 1, où se trouvent aussi quelques notions sur le bruit rose. Le chapitre 5 présente les notions de psychoacoustiques.