Examen théorie du signal
L3SPI

Mercredi 20 décembre

Nom : **Prénom :**

La durée de l'examen est d'une heure. Les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une copie double manuscrite est autorisée. Le sujet est à joindre à la copie à l'issue de l'examen.

Exercice 1. *On considère un filtre défini par sa relation entrée-sortie transformant $x(t)$ en $y(t)$*

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) - x(t-1) \tag{1}$$

1. *Exprimer $Y(\nu)$ (la transformée de Fourier de $y(t)$) en fonction $X(\nu)$ (la transformée de Fourier de $x(t)$), en vous aidant des formules du cours.*
2. *Montrez comment en déduire que la réponse fréquentielle est.*
$$H(\nu) = e^{-i\pi\nu}\operatorname{sinc}(\pi\nu)$$
3. *Sachant que*
$$\text{TF}\left[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = \operatorname{sinc}(\pi\nu)e^{-i\pi\nu}$$
calculez la réponse impulsionnelle du filtre
4. *On place en entrée de ce filtre $x_0(t) = e^{i\pi t}$ montrez que la sortie est alors*
$$y_0(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) * e^{i\pi t}$$
5. *En remarquant que $H(0.5) = -\frac{2i}{\pi}$, montrez que $y_0(t) = -\frac{2i}{\pi}e^{i\pi t}$.*
6. *Montrez que $x_0(t)$ et $y_0(t)$ vérifie l'équation (1).*

Solution

1. À partir de la relation entrée-sortie, on a
$$2i\pi\nu Y(\nu) = X(\nu) - e^{-2i\pi\nu}X(\nu)$$
Et la réponse fréquentielle est donc
$$H(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} = e^{-i\pi\nu}\operatorname{sinc}(\pi\nu)$$
2. On remarque que $\text{TF}\left[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = H(\nu)$, aussi $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.
3. La relation entrée-sortie d'un filtre peut s'écrire avec le produit de convolution
$$y_0(t) = h(t) * x_0(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) * e^{i\pi t}$$

4.

$$y_0(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x_0(t-\tau)\,d\tau = e^{i\pi t}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(\tau)e^{-i\pi\tau}\,d\tau = e^{i\pi t}H\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\pi t}(-i\frac{1}{\frac{\pi}{2}}) = -\frac{2i}{\pi}e^{i\pi t}$$

5.

$$\frac{d}{dt}y_0(t) = -\frac{2i}{\pi}i\pi e^{i\pi t} = 2e^{i\pi t} = e^{i\pi t} - e^{i\pi(t-1)} = x_0(t) - x_0(t-1)$$

Exercice 2. *On considère un signal* $x(t) = it\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$*. Sa transformée de Fourier est notée* $X(\nu)$*. On note* $y(t)$ *un autre signal dont la transformée de Fourier est* $Y(\nu)$*.*

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{2}$$

Pour simplifier les calculs ici, on admet les calculs théoriques suivants

$$J(\alpha) = \int_0^1 te^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha}(\alpha-1)+1}{\alpha^2} \tag{3}$$

$$TF\left[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = \mathrm{sinc}(\pi\nu)e^{-i\pi\nu} \tag{4}$$

α *étant un complexe non-nul.*

1. *Montrez que* $X(0) = \frac{i}{2}$*.*
2. *Calculez* $y(t)$
3. *En utilisant l'équation (4), calculez* $Y(\nu)$ *et montrez que* $Y(1) = -i$
4. *En utilisant le fait que* $Y(1) = i$ *et sans calculer* $X(\nu)$*, montrez que* $X(1) = -\frac{1}{2\pi}$
5. *En utilisant l'équation (3) et la définition de* $x(t)$*, montrez que* $X(1) = -\frac{1}{2\pi}$

Simulation :

```
fe=1e6; t=0:1/fe:1;
x=@(t)i*t;
abs(sum(x(t))/fe-i/2),
exp_=@(t)exp(-i*2*pi*t);
X1=sum(x(t).*exp_(t))/fe,
X1_th=-1/pi/2;
abs(X1-X1_th),
alpha=randn(1)+i*randn(1);
fe=1e6; t=0:1/fe:1;
x=@(t)t.*exp(alpha*t);
xalpha=sum(x(t))/fe,
xalpha_th=(exp(alpha)*(alpha-1)+1)/alpha^2;
abs(xalpha-xalpha_th),
```

Solution :

1.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_0^1 it\,dt = \frac{i}{2}$$

2.

$$y(t) = -i\delta(t-1) + i\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$$

3.

$$Y(\nu) = -ie^{-2i\pi\nu} + i\,\mathrm{sinc}(\pi\nu)e^{-i\pi\nu}$$

Aussi $Y(1) = -i$.

4.

$$X(1) = \frac{\mathrm{TF}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right](1)}{2i\pi} = \frac{Y(1)}{2i\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

5.

$$X(1) = \int_0^1 te^{-2i\pi t}\,dt = J(-2i\pi) = -\frac{1}{2\pi}$$
