Examen traitement numérique du signal

Vendredi 19 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

Exercice 1. *() On considère le filtre de fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{p+1}$. Calculez le filtre numérique correspondant avec la transformée bilinéaire, la fréquence d'échantillonnage considérée est* 2Hz.

Solution :

$$\frac{2}{T_e} = 2f_e = 4 \quad p = 4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad H^{\#}(z) = \frac{1+z^{-1}}{5-3z^{-1}}$$

Exercice 2. *() On considère une signal x_n défini par*

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \text{ et sinon } x_n = 0$$

avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 100\text{Hz}$. On applique les deux traitements suivants.

- *La première étape consiste en un sur-échantillonnage, plus précisément, entre chaque échantillon du signal x_n on insère deux zéros. Le signal obtenu est noté z_n.*
- *La deuxième étape consiste en un filtrage. Le filtre est appliqué sur z_n avec une réponse impulsionnelle définie par $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{4}$ et $h_n = 0$ sinon. Le signal ainsi transformé est noté y_n.*

On s'intéresse aux premiers échantillons des signaux obtenus.

1. *Calculez les instants associés aux cinq premiers échantillons de x_n notés $t_n^{(x)}$.*
2. *Calculez les valeurs des cinq premiers échantillons de z_n.*
3. *Calculez les instants associés aux cinq premiers échantillons de z_n notés $t_n^{(z)}$.*
4. *Écrivez la relation entre z_n et y_n.*
5. *Calculez les valeurs des cinq premiers échantillons de y_n.*
6. *Calculez les instants associés aux cinq premiers échantillons de y_n notés $t_n^{(y)}$.*

Solution :

1. $t_n^{(x)} = nT_e$
2. $$z_0 = x_0 = 1, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = x_1 = 2, \quad z_4 = 0$$
3. $t_n^{(z)} = n\frac{T_e}{3} = \frac{n}{3f_e}$

$$t_0^{(z)} = 0, \quad t_1^{(z)} = \frac{10}{3}\text{ms}, \quad t_2^{(z)} = \frac{20}{3}\text{ms}, \quad t_3^{(z)} = 10\text{ms}, \quad t_4^{(z)} = \frac{40}{3}\text{ms}, \quad t_5^{(z)} = \frac{50}{3}\text{ms}$$

4. $y_n = \frac{1}{4}\left(z_n + z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3}\right)$

5.

$$y_0 = \frac{1}{4} \quad y_1 = \frac{1}{4} \quad y_2 = \frac{1}{4} \quad y_3 = \frac{3}{4} \quad y_4 = \frac{1}{2}$$

6. $t_n^{(y)} = n\frac{T_e}{3} = \frac{n}{3f_e}$

$$t_0^{(y)} = 0, \quad t_1^{(y)} = \frac{10}{3}\text{ms}, \quad t_2^{(y)} = \frac{20}{3}\text{ms}, \quad t_3^{(y)} = 10\text{ms}, \quad t_4^{(y)} = \frac{40}{3}\text{ms}, \quad t_5^{(y)} = \frac{50}{3}\text{ms}$$

Exercice 3. *On considère un signal $x(t) = \mathbf{1}_{[0,1.5[}(t) - \mathbf{1}_{[1.5,3[}(t)$ périodique de période 3.*

1. *Sachant que la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ vaut $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$, calculez la transformée de Fourier de $y_1(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}$*
2. *Calculez la transformée de Fourier de $y_2(t) = \mathbf{1}_{[0,1.5[}(t)$*
3. *Calculez la transformée de Fourier de $y_3(t) = x(t) = \mathbf{1}_{[0,1.5[}(t) - \mathbf{1}_{[1.5,3[}(t)$*
4. *En remarquant les points communs entre la série de Fourier et la transformée de Fourier $\hat{X}_k = \frac{1}{3}\hat{Y}_3(\frac{k}{3})$*
5. *montrez que la transformée de Fourier de $x(t)$ est*

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{j\pi(2k+1)}\delta\left(f - \frac{2k+1}{3}\right)$$

Solution :

1.

$$\hat{Y}_1(f) = e^{-j\pi f}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

2. $y_2(t) = \mathbf{1}_{[0,3/2[}(t) = y_1(\frac{2t}{3})$

$$\hat{Y}_2(f) = e^{-j\pi\frac{3f}{2}}\frac{\sin(\pi 3f/2)}{\pi f}$$

3. $y_3(t) = y_2(t) - y_2(t - \frac{3}{2})$

$$\hat{Y}_3(f) = \hat{Y}_2(f) - \hat{Y}_2(f)e^{-j\pi 3f/2} = e^{-j\pi\frac{3f}{2}}\frac{\sin(\pi 3f/2)}{\pi f}(1 - e^{-j\pi 3f}) = 2je^{-j\pi 3f}\frac{\sin^2(\pi 3f/2)}{\pi f}$$

4. On applique les transformées de Fourier sur $y_3(t)$ et sur $x(t)$ avec $T = 3$.

$$\begin{cases} \widehat{Y}_3(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_3(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \\ \widehat{X}_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}\,dt \qquad = \frac{1}{T}\widehat{Y}_3\left(\frac{k}{T}\right) \end{cases}$$

$$\widehat{X}_0 = 0 \text{ et } \widehat{X}_k = 2je^{-j\pi k}\frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k}$$

On observe que si k est paire, $\widehat{X}_k = 0$. On pose alors $k = 2k' + 1$.

$$\widehat{X}_k = 2je^{-j\pi(2k'+1)}\frac{\sin^2(\pi(2k'+1)/2)}{\pi(2k'+1)} = \frac{2}{j\pi(2k'+1)}$$

Exercice 4. *On cherche à simuler la détection de trois avions au moyen d'un radar dans le même contexte que le TP2. Cette simulation est composée d'une simulation de l'émission du radar (radar_emet), d'une simulation de la présence ou non de l'avion à telle date (avion_est), d'une simulation de la façon dont le signal émis est transformé en un signal reçu (signal_revient) et de l'exploitation par le radar du signal reçu pour trouver la distance entre le radar et l'avion (radar_recoit). Voici le pseudo-code qui centralise les différentes simulations (simulation).*

```
FONCTION simulation()
  radar_emis = radar_emet()
  avion_est = avion_est_tirage()
  radar_recu = signal_revient(radar_emis,avion_est)
  avion_positions = radar_recoit(radar_emis,radar_recu)
```

1. *Donnez le pseudo-code de* `avion_est_tirage` *en n'indiquant que les tâches principales.*

2. *Donnez le pseudo-code de* `signal_revient` *en n'indiquant que les tâches principales.*

Solution :

1.
```
FONCTION avion_est = avion_est_tirage()
    REPETER INFINIMENT
    avion1 = tirage aleatoire indice
    avion2 = tirage aleatoire indice
    avion3 = tirage aleatoire indice
    SI l'ecart entre tous les avions est plus que 50
      ALORS quitter la boucle REPETER.
    FIN REPETER
    avion_est = 300 zéros
    avion_est(avion1) += 1
    avion_est(avion2) += 1
    avion_est(avion3) += 1
```

2.
```
FONCTION radar_recu = signal_revient(radar_emis,avion_est)
    radar_recu = 300 zéros
    motif = 50 premiers indices de radar_emis
    POUR chaque indice de avion_est
      SI avion_est(indice) == 1
      ALORS radar_recu(indice:indice+50-1) += motif
    FIN POUR
```

Exercice 5. *On considère un signal x_n périodique de période 3 et $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$. La fréquence d'échantillonnage est ici de $5Hz$. On cherche à calculer l'autocorrélation de ce signal, notée ici $\gamma_x[k]$.*

1. *Donnez la formule de cette autocorrélation en fonction de x_n.*

2. *Montrez à partir de cette formule que l'autocorrélation est périodique de période 3.*

3. *Calculez $\gamma_x[0]$.*

4. *Calculez $\gamma_x[1]$.*

5. *Calculez $\gamma_x[2]$.*

6. *Montrez par le calcul que la transformée de Fourier de $\gamma_x[k]$ est réel et positive.*

Solution :

1.
$$\gamma_x[k] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_n x_{n-k}$$

2.
$$\gamma_x[k+3] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_n x_{n-k-3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_n x_{n-k} = \gamma_x[k]$$

3.
$$\gamma_x[0] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_n^2 = \frac{1}{3}(1+1+0) = \frac{2}{3}$$

4.

$$\gamma_x[1] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_n x_{n-1} = \frac{1}{3}(0-1+0) = \frac{-1}{3}$$

5.

$$\gamma_x[2] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_n x_{n-2} = \frac{1}{3}(-1+0+0) = \frac{-1}{3}$$

6.

$$\Gamma_x(f) = \text{TFD}[\gamma_x](f) = \frac{1}{9}\left(2 - e^{-j2\pi f T_e} - e^{-j4\pi f T_e}\right) = \frac{1}{9}\left(2 - e^{-j2\pi f T_e} - e^{j2\pi f T_e}\right) = \frac{2-2\cos(2\pi f T_e)}{9} \geq 0$$