Examen théorie du signal
L3SPI

Vendredi 7 novembre

Nom : **Prénom :**

La durée de l'examen est d'une heure. Les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une copie double manuscrite est autorisée. Le sujet est à joindre à la copie à l'issue de l'examen.

Exercice 1. *On considère un signal $x(t)$ représenté sur la figure 1.*

1. *Trouvez des valeurs de a, b, c, d, e, f, g tels que*

$$x(t) = (dt + e)\mathbf{1}_{[a,b]}(t) + (ft + g)\mathbf{1}_{[b,c]}(t) \tag{1}$$

2. *Dessinez sur la droite de la figure 1 $y(t) = x(t) - x(3 - t)$.*

3. *Calculez $z(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.*

Solution :

1.

$$x(t) = (1 + t)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + (3 - t)\mathbf{1}_{[1,2]}(t) \tag{2}$$

2. Droite de la figure 2.

3. Il y a un front montant en $t = 0$ et un front descendant en $t = 2$.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}(t) - \mathbf{1}_{[1,2[}(t) + \delta(t) - \delta(t - 2) \tag{3}$$

```
t=-1:1e-3:4;
x=zeros(size(t));
x((t>=0)&(t<1))=1+t((t>=0)&(t<1));
x((t>=1)&(t<2))=3-t((t>=1)&(t<2));
figure(1); plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS13_1a.png');
tp=3-t;
xp=zeros(size(tp));
xp((tp>=0)&(tp<1))=1+tp((tp>=0)&(tp<1));
xp((tp>=1)&(tp<2))=3-tp((tp>=1)&(tp<2));
y=x-xp;
figure(1); plot(t,x+5e-2,'g:','linewidth',2,t,xp-5e-2,'r:','linewidth',2,t,x-xp,'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS13_1b.png');
figure(1); axis([-1 4 -3 3]);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS13_1c.png');
```

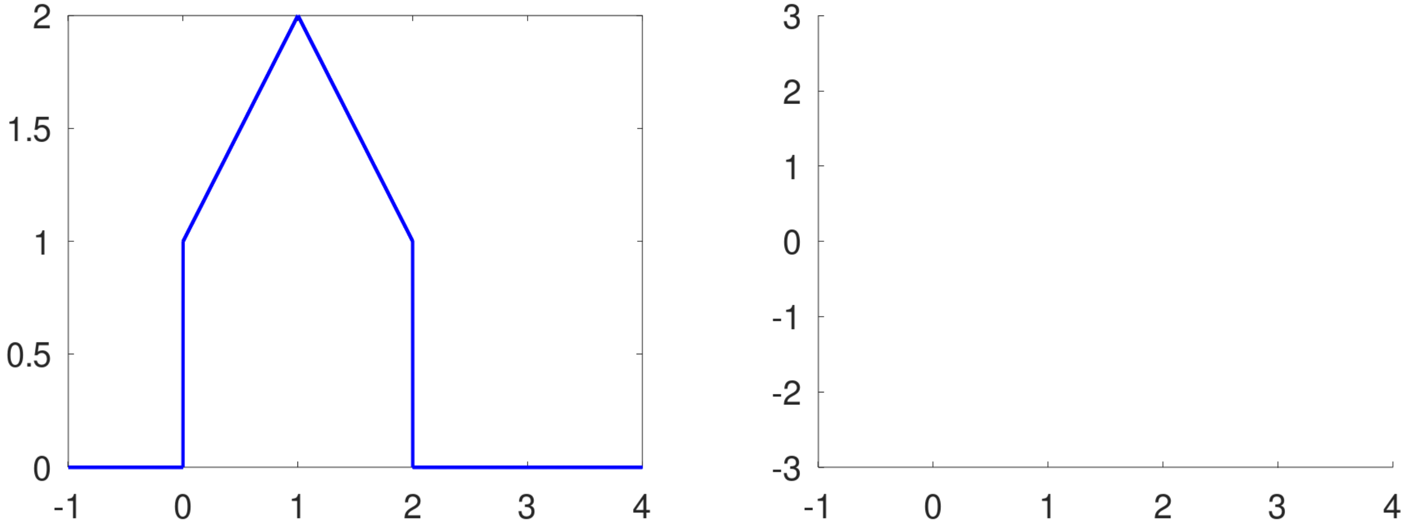

Figure 1: Graphiques de l'exercice 1. À gauche $x(t)$ et à droite dessinez $y(t) = x(t) - x(3-t)$.

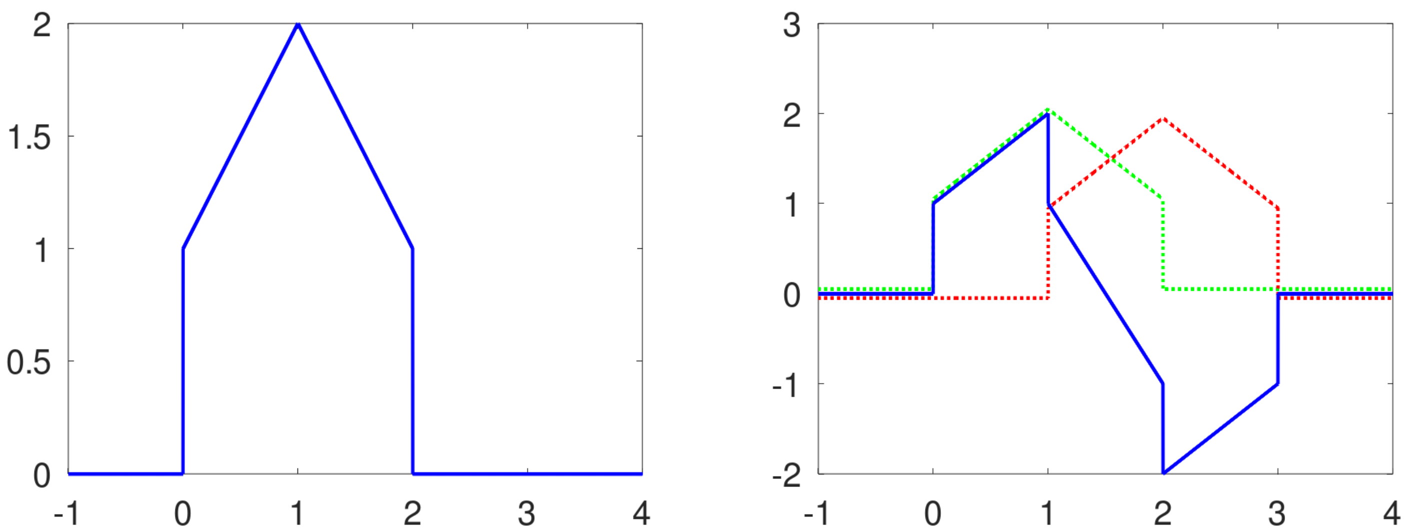

Figure 2: Graphiques de l'exercice 1. À gauche $x(t)$ et à droite dessinez $y(t) = x(t) - x(3-t)$.

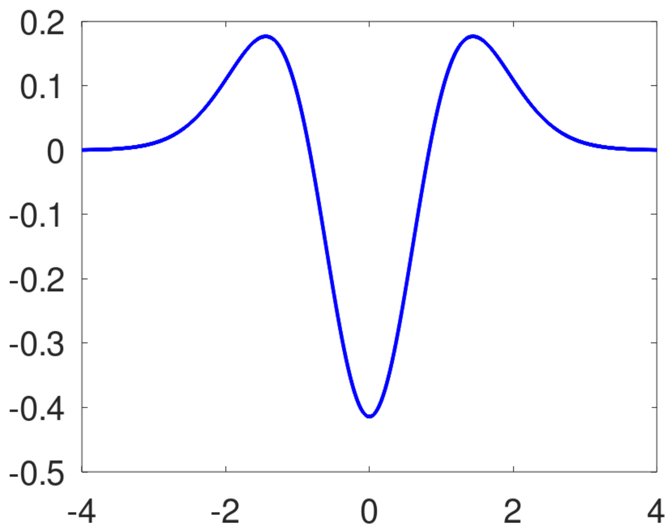

Figure 3: Graphique de l'exercice 2.

Exercice 2. *On considère le signal* $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} - \sqrt{2}e^{-t^2}$.

1. *Ce signal est-il pair, impair ?*
2. *Ce signal est-il toujours positif, négatif ?*
3. *Calculez* $X(0)$.

Solution :

1. Ce signal est pair, parce que défini à partir de signaux pairs.
2. Ce signal comporte à la fois des parties négatives par exemple en $t = 0$ et sa surface comptée négativement lorsque la courbe est sous l'axe des abscisses est nulle donc il a aussi des parties positives.
3.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dt = \sqrt{2\pi} - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = 0 \tag{4}$$

```
t=-4:1e-3:4;
x=exp(-t.^2/2)-sqrt(2)*exp(-t.^2);
figure(1); plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS14_1a.png');
```

Exercice 3. *On considère le signal* $x_\alpha(t) = 1 + \max(\alpha, t-1)$ *pour* $\alpha \in [0, 2]$.

1. *Calculez* $x_\alpha(0)$ *et* $x_0(t)$
2. *Représentez sur la gauche de la figure 4,* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$.
3. *Représentez sur la droite de la figure 4,* $x_\alpha(1)$ *et* $x_\alpha(2)$.

Solution :

1.

$$x_\alpha(0) = 1 + \max(\alpha, -1) = 1 + \alpha \text{ et } x_0(t) = 1 + \max(0, t-1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \le 1 \\ t & \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases} \tag{5}$$

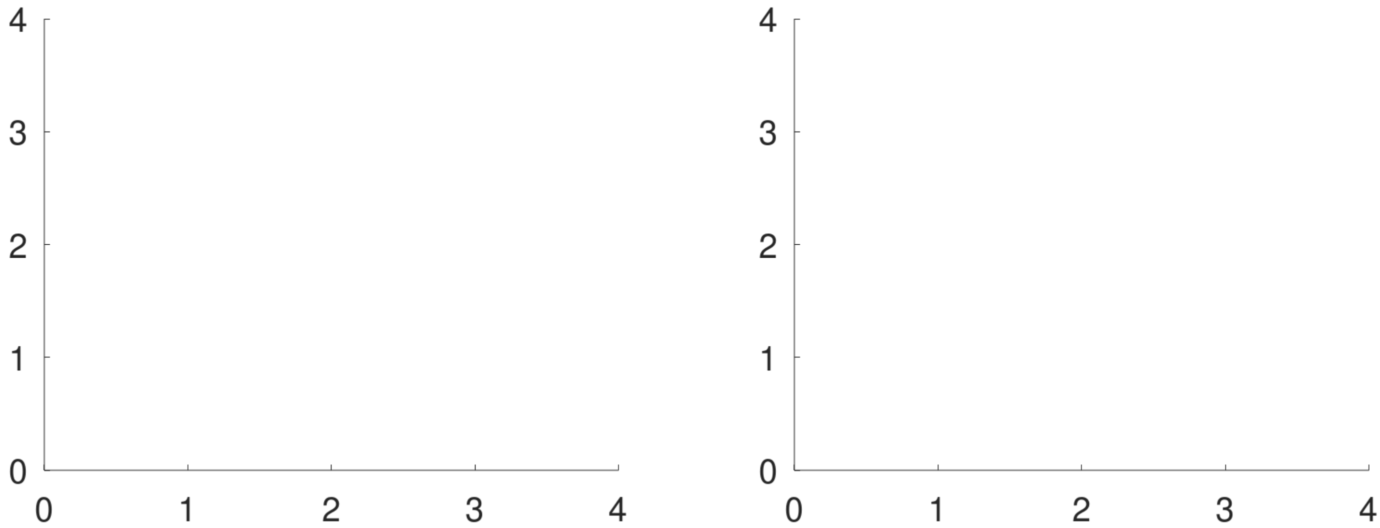

Figure 4: Graphiques à compléter de l'exercice 3.

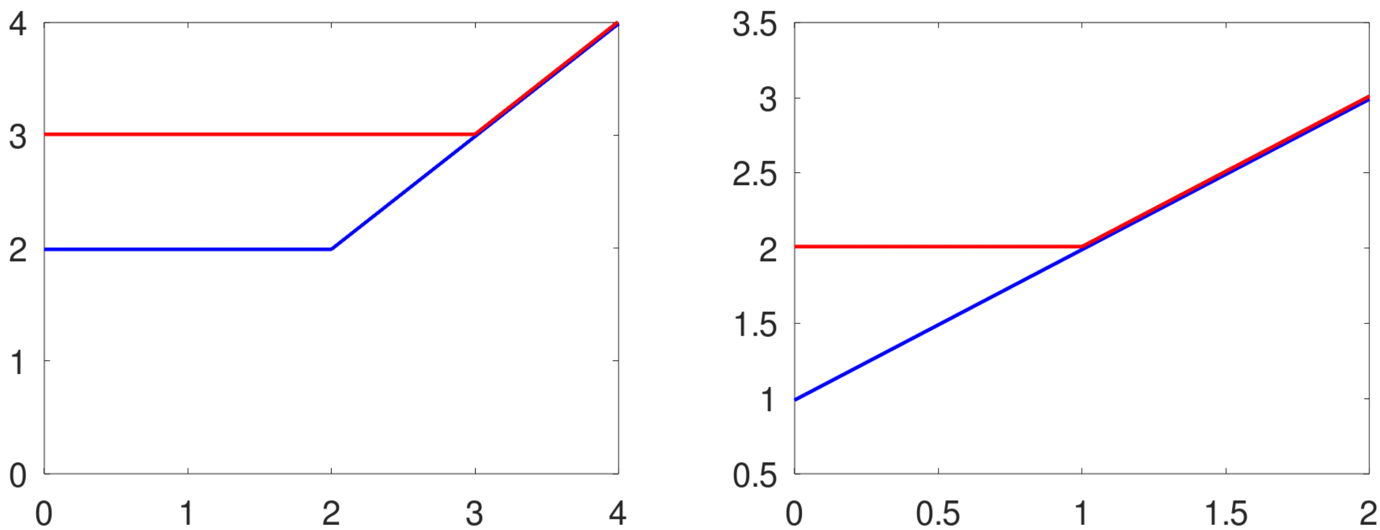

Figure 5: Graphique de l'exercice 3.

2. Gauche de la figure 5.

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 1 + \alpha \text{ si } t \leq \alpha + 1 \\ t \text{ si } t \geq \alpha + 1 \end{cases} \tag{6}$$

3. Droite de la figure 5.

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} t \text{ si } \alpha \leq t - 1 \\ 1 + \alpha \text{ si } \alpha \geq t - 1 \end{cases} \tag{7}$$

```
delete(1);
figure(1); axis([0 4 0 4]);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS15_1a.png');
t=0:1e-3:4;
```

```
x1=1+max(1,t-1);
x2=1+max(2,t-1);
plot(t,x1-1e-2,'b-','linewidth',2,t,x2+1e-2,'r-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20); axis([0 4 0 4]);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS15_1b.png');
alpha=0:1e-3:2;
xa1=1+max(alpha,1-1);
xa2=1+max(alpha,2-1);
plot(alpha,xa1-1e-2,'b-','linewidth',2,alpha,xa2+1e-2,'r-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'../figures/fig_xexTS15_1c.png');
```