Examen traitement numérique du signal

Mercredi 11 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

θ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$e^{j\theta}$	1		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1-j+j\sqrt{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}$	j

Exercice 1. *La figure 1 montre le module et l'argument de la transformée de Fourier du signal recherché.*

1. *Le signal est-il à valeurs réelles ? S'agit-il d'un signal temps continu ou temps discret, périodique ou non-périodique. Quelle est la fréquence d'échantillonnage et/ou la période du signal ?*

2. *Donnez les valeurs du signal dont la transformée de Fourier coïncide avec la figure.*

```
xn_per=[2,0,1];
Xk_per=[1,exp(j*pi/6)/sqrt(3),exp(-j*pi/6)/sqrt(3)];
assert(abs(fft(xn)/3-Xk)<1e-8);
figure(1);
f=-15:3:15; f_ind=1+(f-9*floor(f/9))/3;  Xk=zeros(size(f)); Xk=Xk_per(f_ind);
plot(f,abs(Xk),'b+','linewidth',3,f,1/sqrt(3)*ones(size(f)),'k:','linewidth',2);
text(0,1/sqrt(3)+0.02,'sqrt(3)/3','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'L:\t1\TNS\XEX\FIG\fig_xex134_fig1.png');
figure(2);
f=-15:3:15; f_ind=1+(f-9*floor(f/9))/3;  Xk=zeros(size(f)); Xk=Xk_per(f_ind);
plot(f,angle(Xk),'b+','linewidth',3,f,pi/6*ones(size(f)),'k:','linewidth',2,f,-pi/6*ones(size(f)),'k:'
text(0,pi/6+0.02,'pi/6','FontSize',20);
text(0,-pi/6+0.02,'-pi/6','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(2,'L:\t1\TNS\XEX\FIG\fig_xex134_fig2.png');
```

Solution :

1. Le module est pair et l'argument est impair donc le signal est réel. Le spectre est périodique de période 9Hz. Donc il s'agit d'un signal temps discret échantillonné à $f_e = 9$Hz. Chaque raie est espacé de 3Hz, donc le signal est de période $3T_e = 1/3$s et $N = 3$.

2. Les modules sont $1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$. Les phases sont $0, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$. On a donc

$$\widehat{X}_0 = 1,\ \widehat{X}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{+j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{6},\ \widehat{X}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$

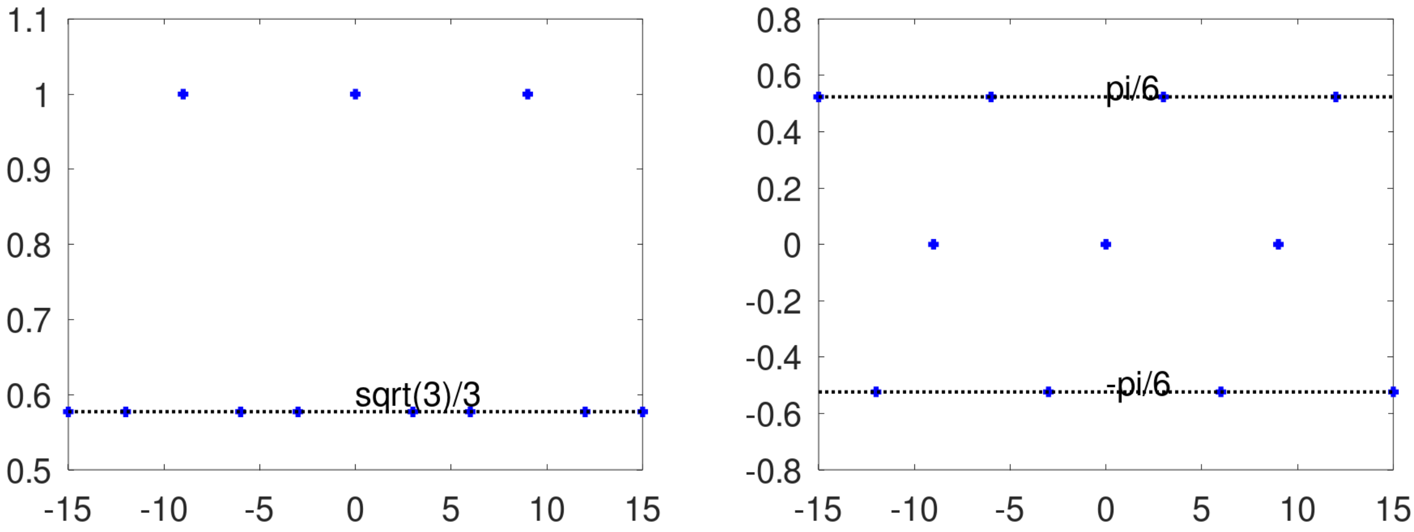

Figure 1: Module et argument de la transformée de Fourier du signal recherché pour l'exercice 1.

La transformée de Fourier discrète inverse donne alors

$$
\begin{array}{l}
x_0 = \widehat{X}_0 + \widehat{X}_1 + \widehat{X}_2 = 2 \\
x_1 = \widehat{X}_0 + \widehat{X}_1 e^{\frac{j2\pi}{3}} + \widehat{X}_2 e^{\frac{j4\pi}{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{j5\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{j7\pi}{6}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}) = 0 \\
x_2 = \widehat{X}_0 + \widehat{X}_1 e^{\frac{j4\pi}{3}} + \widehat{X}_2 e^{\frac{j8\pi}{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{j3\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{j\pi}{2}} = 1 - j\frac{\sqrt{3}}{3} + j\frac{\sqrt{3}}{3} = 1
\end{array} \tag{2}
$$

Exercice 2. *On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = 2\pi e^{-2\pi t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$. On met en entrée de ce filtre un signal $x_k(t) = \cos(k\pi t)$ avec $k \in \mathbb{N}$. La sortie de ce filtre $y_k(t)$ est moyennée sur une durée $T = 1$ avec des pondérations différentes.*

$$
c_k = \int_0^1 y_k(t) \cos(\pi k t)\, dt \text{ et } s_k = \int_0^1 y_k(t) \sin(\pi k t)\, dt \tag{3}
$$

1. *Montrez que $c_0 = 1$ et montrez que $s_0 = 0$.*
2. *Calculez la réponse fréquentielle.*
3. *Montrez que pour $k > 0$, $c_k = \frac{2}{4+k^2}$.*
4. *Montrez que $s_k = \frac{k}{4+k^2}$.*
5. *Indiquez à quoi pourrait servir ce type d'expérimentation ?*

Solution :

1. $x_0(t) = 1$, $y_0(t) = \int_0^{+\infty} h(t)\, dt = 1$ et $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, dt = 1$. Quand $k = 0$, $\sin(\pi k) = 0$ et donc $s_0 = 0$.
2.
$$
\widehat{H}(f) = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t} e^{-j2\pi f t}\, dt = 2\pi \left[-\frac{e^{-2\pi t(1+jf)}}{2\pi(1+jf)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+jf} \tag{4}
$$
3. Le cours indique la réponse forcée d'un système.
$$
x_k(t) = \frac{1}{2} e^{jk\pi t} + \frac{1}{2} e^{-jk\pi t} \quad \Rightarrow \quad y_k(t) = \frac{1}{2}\widehat{H}\left(\frac{k}{2}\right) e^{jk\pi t} + \frac{1}{2}\widehat{H}\left(-\frac{k}{2}\right) e^{-jk\pi t} \tag{5}
$$
En remplaçant f par sa valeur en fonction de k.
$$
\widehat{H}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{\substack{1 + j\frac{k}{2} \\ 2}} = \frac{2}{2+jk} \tag{6}
$$

On utilise ces deux intermédiaires de calcul

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^1 e^{j\pi kt}\cos(k\pi t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{j\pi kt}e^{jk\pi t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{j\pi kt}e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{2} \\ \int_0^1 e^{-j\pi kt}\cos(k\pi t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-j\pi kt}e^{jk\pi t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-j\pi kt}e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{7}$$

Avec ces intermédiaires, on trouve

$$c_k = \frac{1}{4}\widehat{H}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{4}\widehat{H}\left(-\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{2}{2+jk} + \frac{1}{4}\frac{2}{2-jk} = \frac{2}{4+k^2} \tag{8}$$

4. Le cours indique la réponse forcée d'un système.

$$x_k(t) = \frac{1}{2}e^{jk\pi t} + \frac{1}{2}e^{-jk\pi t} \quad \Rightarrow \quad y_k(t) = \frac{1}{2}\widehat{H}\left(\frac{k}{2}\right)e^{jk\pi t} + \frac{1}{2}\widehat{H}\left(-\frac{k}{2}\right)e^{-jk\pi t} \tag{9}$$

En remplaçant f par sa valeur en fonction de k.

$$\widehat{H}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{1+j\frac{k}{2}} = \frac{2}{2+jk} \tag{10}$$

On utilise ces deux intermédiaires de calcul

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^1 e^{j\pi kt}\sin(k\pi t)\ dt = \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{j\pi kt}e^{jk\pi t}\,dt - \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{j\pi kt}e^{-jk\pi t}\,dt = -\frac{1}{2j} = \frac{j}{2} \\ \int_0^1 e^{-j\pi kt}\sin(k\pi t)\ dt = \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi kt}e^{jk\pi t}\,dt - \frac{1}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi kt}e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2} \end{array}\right. \tag{11}$$

Avec ces intermédiaires, on trouve

$$s_k = \frac{j}{4}\widehat{H}\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{j}{4}\widehat{H}\left(-\frac{k}{2}\right) = \frac{j}{4}\frac{2}{2+jk} - \frac{j}{4}\frac{2}{2-jk} = \frac{k}{4+k^2} \tag{12}$$

5. C'est une façon d'estimer la réponse fréquentielle à partir d'un filtre pour lequel on peut mesurer les réponses données face à des entrées choisies. Le fait de moyenner la sortie est une manière de d'être robuste vis-à-vis d'erreurs de mesures.

```
for num=1:10
T=1;
k=round(rand(1)*5); k,
fe=1e4;
t=-5:1/fe:(15-1/fe);
x=cos(pi*t*k/T);
h=2*pi*exp(-t(t>=0)*2*pi)*(t(2)-t(1));
y=filter(h,1,x);
ck=sum(y.*cos(pi*t*k/T))*(t(2)-t(1))/20;
sk=sum(y.*sin(pi*t*k/T))*(t(2)-t(1))/20;
if k>0
  assert(abs(ck-2./(4+k.^2))<1e-2),
else
  assert(abs(ck-1)<1e-2),
end
assert(abs(sk-k./(4+k.^2))<1e-2),
end

t0=3.6;
y(t==t0)-sum(x.*2*pi*exp(-(t0-t)*2*pi).*(t<=t0))*(t(2)-t(1))
```

Exercice 3. *On cherche à simuler la détection de trois avions au moyen d'un radar dans le même contexte que le TP2. Cette simulation est composée d'une simulation de l'émission du radar (radar_emet), d'une simulation de la présence ou non de l'avion à telle date (avion_est), d'une simulation de la façon dont le signal émis est transformé en un signal reçu (signal_revient) et de l'exploitation par le radar du signal reçu pour trouver la distance entre le radar et l'avion (radar_recoit). Voici le pseudo-code qui centralise les différentes simulations (simulation).*

```
FONCTION simulation()
  radar_emis = radar_emet()
  avion_est = avion_est_tirage()
  radar_recu = signal_revient(radar_emis,avion_est)
  avion_positions = radar_recoit(radar_emis,radar_recu)
```

1. *Donnez le pseudo-code de* `avion_est_tirage` *en n'indiquant que les tâches principales.*

2. *Donnez le pseudo-code de* `signal_revient` *en n'indiquant que les tâches principales.*

Solution :

1. ```
   FONCTION avion_est = avion_est_tirage()
     REPETER INFINIMENT
     avion1 = tirage aleatoire indice
     avion2 = tirage aleatoire indice
     avion3 = tirage aleatoire indice
     SI l'ecart entre tous les avions est plus que 50
       ALORS quitter la boucle REPETER.
     FIN REPETER
     avion_est = 300 zéros
     avion_est(avion1) += 1
     avion_est(avion2) += 1
     avion_est(avion3) += 1
   ```

2. ```
   FONCTION radar_recu = signal_revient(radar_emis,avion_est)
     radar_recu = 300 zéros
     motif = 50 premiers indices de radar_emis
     POUR chaque indice de avion_est
       SI avion_est(indice) == 1
       ALORS radar_recu(indice:indice+50-1) += motif
     FIN POUR
   ```