Examen traitement numérique du signal

Mercredi 11 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

θ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$e^{j\theta}$	1		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1-j+j\sqrt{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}$	j

Exercice 1. *La figure 1 montre le module et l'argument de la transformée de Fourier du signal recherché.*

1. *S'agit-il d'un signal temps continu ou temps discret, périodique ou non-périodique. Quelle est la fréquence d'échantillonnage et/ou la période du signal ?*

2. *Donnez les valeurs du signal dont la transformée de Fourier coïncide avec la figure.*

```
Xk_n_per=[1,exp(j*pi/6)/sqrt(3),exp(-j*pi/6)/sqrt(3)];
f_n_per=[0,3,6];
figure(1);
f=-15:3:15; Xk=zeros(size(f)); assert(f_n_per==f(ismember(f,f_n_per))); Xk(ismember(f,f_n_per))=Xk_n_p
plot(f,abs(Xk),'b+','linewidth',3,f,1/sqrt(3)*ones(size(f)),'k:','linewidth',2);
text(0,1/sqrt(3)+0.02,'sqrt(3)/3','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'L:\t1\TNS\XEX\FIG\fig_xex134b_fig1.png');
figure(2);
plot(f,angle(Xk),'b+','linewidth',3,f,pi/6*ones(size(f)),'k:','linewidth',2,f,-pi/6*ones(size(f)),'k:'
text(0,pi/6+0.02,'pi/6','FontSize',20);
text(0,-pi/6+0.02,'-pi/6','FontSize',20);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(2,'L:\t1\TNS\XEX\FIG\fig_xex134b_fig2.png');
%verification
T=1/3;
t=0:1e-4:(T-1e-4);
x=1+(0.5+j*sqrt(3)/6)*exp(j*6*pi*t)+(0.5-j*sqrt(3)/6)*exp(j*12*pi*t);
X0_sim=sum(x)*(t(2)-t(1))/T;
X1_sim=sum(x.*exp(-j*2*pi*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
X2_sim=sum(x.*exp(-j*2*pi*2*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
X3_sim=sum(x.*exp(-j*2*pi*3*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
X4_sim=sum(x.*exp(-j*2*pi*4*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
X_1_sim=sum(x.*exp(j*2*pi*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
```

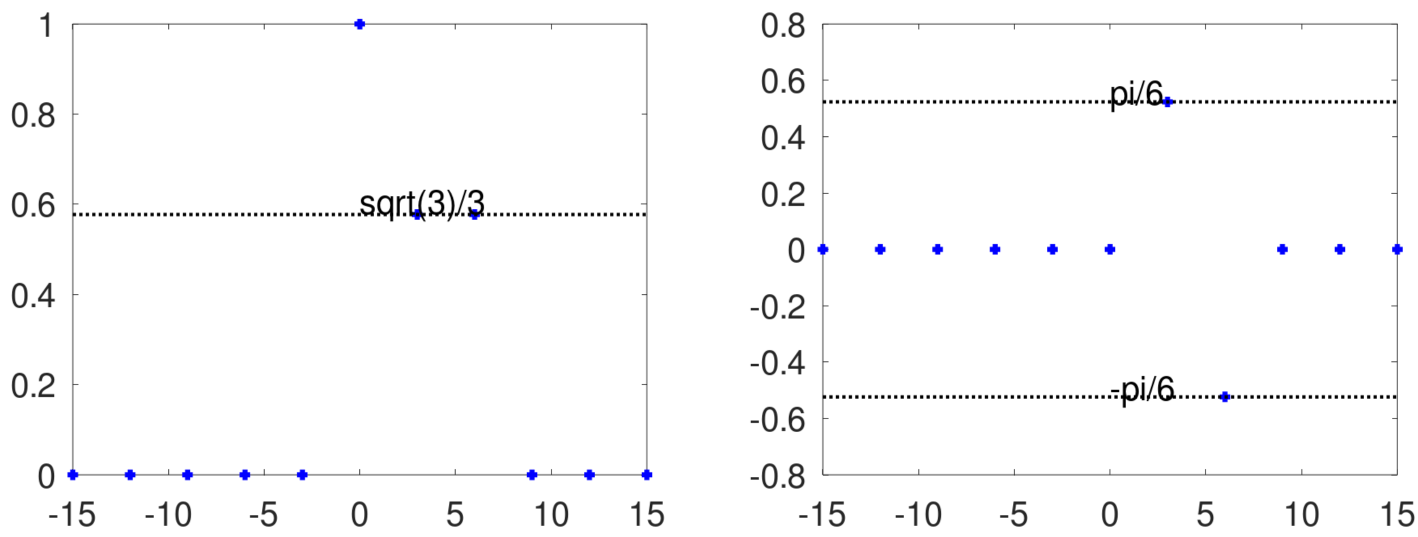

Figure 1: Module et argument de la transformée de Fourier du signal recherché pour l'exercice 1.

```
X_2_sim=sum(x.*exp(j*2*pi*2*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
X_3_sim=sum(x.*exp(j*2*pi*3*t/T))*(t(2)-t(1))/T;
assert(abs(X0_sim-Xk(f==0))<1e-3),
assert(abs(X1_sim-Xk(f==3))<1e-3),
assert(abs(X2_sim-Xk(f==6))<1e-3),
assert(abs(X3_sim-Xk(f==9))<1e-3),
assert(abs(X4_sim-Xk(f==12))<1e-3),
assert(abs(X_1_sim-Xk(f==-3))<1e-3),
assert(abs(X_2_sim-Xk(f==-6))<1e-3),
assert(abs(X_3_sim-Xk(f==-9))<1e-3),
```

Solution :

1. Le module n'est pas pair et l'argument n'est pas impair, donc le signal est complexe. Le spectre est non-périodique, donc il s'agit d'un signal temps continu. Le spectre est constitué de raies, donc il s'agit d'un signal périodique. Chaque raie est espacé de 3Hz, donc le signal est de période $T = 1/3$s.

2. Les modules sont $1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$. Les phases sont $0, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$. On a donc

$$\widehat{X}_0 = 1,\ \widehat{X}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6},\ \widehat{X}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \tag{1}$$

   La transformée de Fourier inverse donne alors

$$x(t) = \widehat{X}_0 + \widehat{X}_1 e^{j6\pi t} + \widehat{X}_2 e^{j12\pi t} = 1 + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)e^{j6\pi t} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)e^{j12\pi t} \tag{2}$$

Exercice 2. *On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = 2\pi e^{-2\pi t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$. On met en entrée de ce filtre un signal $x_k(t) = \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right)$ avec $k \in \mathbb{N}$. La sortie de ce filtre $y_k(t)$ est moyennée sur une durée T avec des pondérations différentes.*

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T y_k(t)\cos\left(\frac{\pi k t}{T}\right)\,dt \tag{3}$$

1. *Montrez que $c_0 = 1$.*

2. *Calculez la réponse fréquentielle.*

3. *Montrez que pour $k>0$, $c_k = \frac{2T^2}{4T^2+k^2}$.*

4. *Indiquez à quoi pourrait servir ce type d'expérimentation ?*

Solution :

1. $x_0(t)=1$, $y_0(t)=\int_0^{+\infty} h(t)\,dt = 1$ et $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = 1$.

2.
$$\widehat{H}(f) = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t} e^{-j2\pi f t}\,dt = 2\pi \left[-\frac{e^{-2\pi t(1+jf)}}{2\pi(1+jf)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+jf} \tag{4}$$

3. Le cours indique la réponse forcée d'un système.
$$x_k(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{jk\pi t}{T}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{jk\pi t}{T}} \quad \Rightarrow \quad y_k(t) = \frac{1}{2}\widehat{H}\left(\frac{k}{2T}\right) e^{\frac{jk\pi t}{T}} + \frac{1}{2}\widehat{H}\left(-\frac{k}{2T}\right) e^{-\frac{jk\pi t}{T}} \tag{5}$$
En remplaçant f par sa valeur en fonction de k.
$$\widehat{H}\left(\frac{k}{2T}\right) = \frac{1}{1+j\frac{k}{2T}} = \frac{2T}{2T+jk} \tag{6}$$
On utilise ces deux intermédiaires de calcul
$$\begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{j\pi k t}{2T}} \cos\left(\frac{k\pi t}{2T}\right)\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^T e^{\frac{j\pi k t}{2T}} e^{j\frac{k\pi t}{2T}}\,dt + \frac{1}{2T}\int_0^T e^{\frac{j\pi k t}{2T}} e^{-j\frac{k\pi t}{2T}}\,dt = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{-j\pi k t}{2T}} \cos\left(\frac{k\pi t}{2T}\right)\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{-j\pi k t}{2T}} e^{j\frac{k\pi t}{2T}}\,dt + \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{-j\pi k t}{2T}} e^{-j\frac{k\pi t}{2T}}\,dt = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$
Avec ces intermédiaires, on trouve
$$c_k = \frac{1}{4}\widehat{H}\left(\frac{k}{2T}\right) + \frac{1}{4}\widehat{H}\left(-\frac{k}{2T}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{jk}{2T}} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{jk}{2T}} = \frac{1}{4}\frac{1-\frac{jk}{2T}+1+\frac{jk}{2T}}{1+\frac{k^2}{4T^2}} = \frac{2T^2}{4T^2+k^2} \tag{8}$$

4. C'est une façon d'estimer la réponse fréquentielle à partir d'un filtre pour lequel on peut mesurer les réponses données face à des entrées choisies. Le fait de moyenner la sortie est une manière de d'être robuste vis-à-vis d'erreurs de mesures.

Exercice 3. *On cherche à simuler la détection de trois avions au moyen d'un radar dans le même contexte que le TP2. Cette simulation est composée d'une simulation de l'émission du radar (radar_emet), d'une simulation de la présence ou non de l'avion à telle date (avion_est), d'une simulation de la façon dont le signal émis est transformé en un signal reçu (signal_revient) et de l'exploitation par le radar du signal reçu pour trouver la distance entre le radar et l'avion (radar_recoit). Voici le pseudo-code qui centralise les différentes simulations (simulation).*

```
FONCTION simulation()
  radar_emis = radar_emet()
  avion_est = avion_est_tirage()
  radar_recu = signal_revient(radar_emis,avion_est)
  avion_positions = radar_recoit(radar_emis,radar_recu)
```

1. *Donnez le pseudo-code de* `radar_emet` *en n'indiquant que les tâches principales.*

2. *Donnez le pseudo-code de* `radar_recoit` *en n'indiquant que les tâches principales.*

Solution :

1.
```
FONCTION radar_emis = radar_emet()
  motif = buit blanc gaussien de longueur 50
  radar_emis = motif suivi de 250 zéros.
```

2. ```
FONCTION avions_positions = radar_recoit(radar_emis,radar_recu)
  coef_intercorrelation = intercorrelation(radar_recu,radar_emis)
  avion_position1 = trouve_maximum (coef_intercorrelation)
  coef_intercorrelation = annule les valeurs autour de avion_position1
  avion_position2 = trouve_maximum (coef_intercorrelation)
  coef_intercorrelation = annule les valeurs autour de avion_position2
  avion_position3 = trouve_maximum (coef_intercorrelation)
  avion_position1 = convertit indice en temps (avion_position1)
  avion_position2 = convertit indice en temps (avion_position2)
  avion_position3 = convertit indice en temps (avion_position3)
  avion_positions = avion_position1, avion_position2, avion_position3
```
```