Théorie du signal

Gabriel Dauphin

November 1, 2024

Contents

Chapter 1

Représentation des signaux non-périodiques, module et argument d'un complexe, distribution de Dirac, indicatrice, calculs de limites, intégrale d'un signal et transformée de Fourier en la fréquence nulle

1.1 Exercices

Exercice 1 *On définit un signal $x(t)$ par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

1. *Tracez la courbe représentative de $x(t)$ pour $t \in [-24]$.*

2. *Calculez $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$ et montrez que $X(0) = 7$.*

Solution :

1. Figure 1.1.

```
t=-2:1e-2:4;
x=zeros(size(t));
x(t<=-1)=0;
x((t<=0)&(t>-1))=2;
x((t<=1)&(t>0))=2-t((t<=1)&(t>0));
x((t<=2)&(t>1))=1+t((t<=1)&(t>0));
x((t<=3)&(t>2))=2;
x(t>3)=0;
figure(1); plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'./figures/fig_exTS1.png');
```

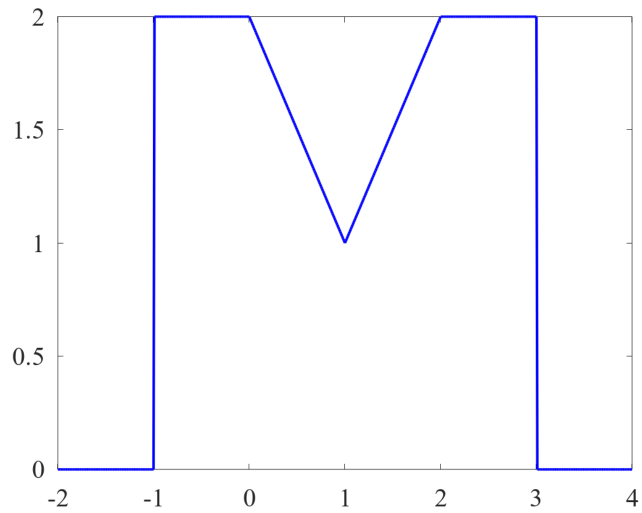


Figure 1.1: Réponse à la question 1 de l'exercice 1.

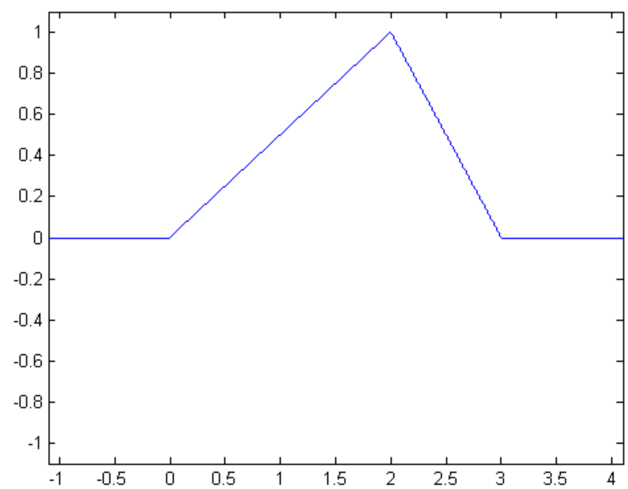


Figure 1.2: Courbe représentative de $x(t)$. Exercice 2

2. On cherche la surface sous la courbe. Celle-ci est composée d'un rectangle de surface $2{\times}1$, de deux carrés de côté 1 disposé en haut à gauche et en haut à droite de la courbe, et de deux triangles rectangles de hauteur 1 et de base 1. La somme de ces surfaces est $2{\times}1 + 2(1{\times}1) + 2\left(\frac{1\times 1}{2}\right) = 7$.

Exercice 2 *On considère un signal noté $x(t)$ et dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$. Ce signal est une succession de segments joignant les instants $t = 0, 2, 3$: $x(0) = 0$, $x(2) = 1$, $x(3) = 0$. Ce signal est nul pour $t \leq 0$ et pour $t \geq 3$.*

1. *Représentez le signal.*
2. *Exprimez le signal en utilisant l'indicatrice $\mathbf{1}_A(t)$ où A est un intervalle.*
3. *Calculez $X(0)$.*

Correction

```
t=-1.1:1e-3:4.1;
```

```
x=t/2.*(t>0).*(t<=2)+(3-t).*(t>2).*(t<=3);
figure(1); plot(t,x); axis([-1.1 4.1 -1.1 3.1]);
```

1. La figure 1.2 montre la courbe représentative de $x(t)$.
2. Pour résoudre cette exercice, on considère successivement les intervalles $]-\infty,0]$, $[0,2]$, $[2,3]$ et $[3,+\infty[$. On peut soit essayer de proposer une solution qui fonctionne, soit utiliser

$$x(t)=\frac{t-t_a}{t_b-t_a}(x_b-x_a)$$

qui est l'équation d'une droite vérifiant $x(t_a)=x_a$ et $x(t_b)=x_b$.

- Pour $t\leq 0$, on a $x(t)=0$.
- Pour $t\in[0,2]$, on a $x(t)=\frac{t}{2}$.
- Pour $t\in[2,3]$, on a $x(t)=3-t$.
- Pour $t\in[3,+\infty[$, on a $x(t)=0$.

Finalement

$$x(t)=\frac{t}{2}\mathbf{1}_{]0,2]}(t)+(3-t)\mathbf{1}_{]2,3]}(t)$$

3. D'après le cours, on sait que

$$X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt$$

On peut soit géométriquement observer que $X(0)$ est la somme des surfaces des deux triangles de surface, $\frac{2\times 1}{2}$ et $\frac{1\times 1}{2}$, ce qui vaut $\frac{3}{2}$, soit faire le calcul.

$$X(0)=\int_0^2\frac{t}{2}\,dt+\int_2^3 3-t\,dt=\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^2+\left[\frac{(3-t)^2}{2}\right]_2^3=1+\frac{1}{2}$$

Exercice 3 *On considère un signal $x(t)=e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, sa transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.*

1. *Représentez $x(t)$*
2. *Calculez $X(0)$*

Exercice 4 *On définit $\Pi(t)=\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. Représentez graphiquement $x(t)=t\Pi(t)$. Calculez $X(0)$.*

Solution :

1. Figure 1.3.
2. $x(t)$ est impair donc $0=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt=X(0)$.

```
t=-2:1e-3:2;
x1=zeros(size(t));
x1(abs(t)<=0.5)=1;
x=t.*x1;
figure(1); plot(t,x1,'g:','linewidth',2,t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'./figures/fig_exTS4.png');
```

Exercice 5 *On note $\mathbb{H}(t)=\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. Montrez que*

$$\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t)=\mathbb{H}(t+\frac{1}{2})-\mathbb{H}(t-\frac{1}{2})$$

Exercice 6 *On définit un signal $x(t)$ par*

$$x(t)=e^{-t}\mathbf{1}_{[0,1[}(t)+e^{-(t-1)}\mathbf{1}_{[1,2[}(t)+e^{-(t-2)}\mathbf{1}_{[2,3[}(t)$$

Représentez ce signal $x(t)$. Calculez $X(0)$.

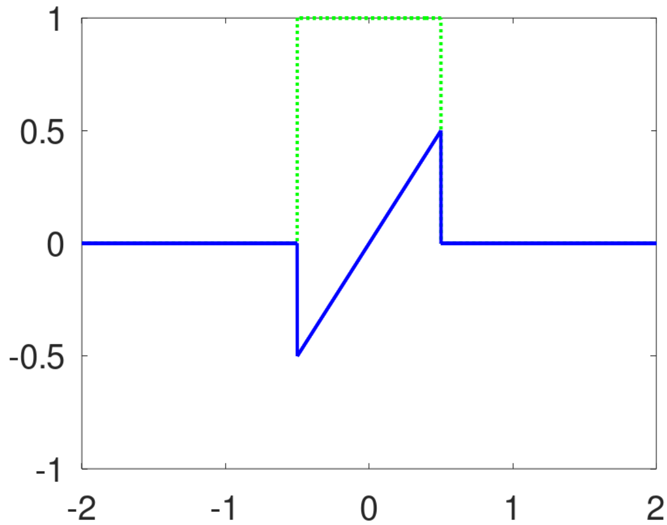


Figure 1.3: $\Pi(t)$ est représenté en pointillé en vert et $x(t)$ est représenté en bleu. Exercice 4.

Chapter 2

Symétrie, utilisation de la valeur absolue, transformations des signaux et leurs conséquences sur la transformée de Fourier, module et argument de la transformée de Fourier

2.1 Exercices

Exercice 7 *On considère un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.*

$$X(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\nu}$$

Représentez le module et l'argument de $X(\nu)$.

Solution : D'après le cours, $|X(\nu)|$ est pair et $\arg(X(\nu))$ est impair.

1. Gauche de la figure 2.1.

$$|X(\nu)| = \left|\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\nu}\right| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|1+2i\pi\nu|} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\nu^2}} \tag{2.1}$$

   $|X(\nu)|$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. Droite de la figure 2.1.
   Pour $\nu > 0$,

$$\arg(X(\nu)) = \arg\left(\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\nu}\right) = -\arg(1+i\nu) = -\arctan(\nu) \tag{2.2}$$

   Comme $\arctan(\nu)$ est une fonction croissante, $\arg(X(\nu))$ est décroissante.

```
nu=-5:1e-3:5;
X=1/2/pi./(1+i*nu);
figure(1); plot(nu,abs(X),'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'./figures/fig_exTS67_1.png');
figure(1); plot(nu,angle(X),'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'./figures/fig_exTS67_2.png');
```

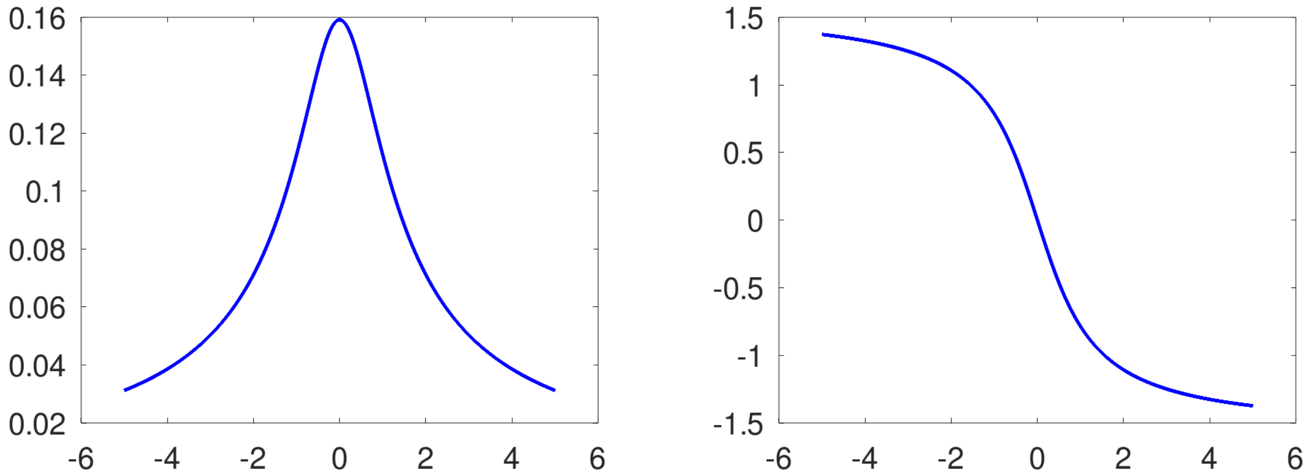


Figure 2.1: Module et argument de $X(\nu)$ en fonction de la fréquence ν pour l'exercice 7.

Exercice 8 *On considère un signal $x_1(t)$ et sa transformée de Fourier notée $X_1(\nu)$.*

$$x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \text{ et } X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}$$

1. *Représentez* $|X_1(\nu)|$
2. *Représentez* $\arg(X_1)(\nu)$

Exercice 9 *On définit un signal $x(t)$ par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Ce signal a déjà été étudié dans l'exercice 1 (p. 2). On considère $y(t) = x(t+1)$.

1. *Montrez que $y(t)$ est un signal pair.*
2. *En déduire la valeur de t_0, telle que $x(t)$ soit symétrique par rapport à t_0.*
3. *Quel est l'argument de $Y(\nu)$.*
4. *Exprimez $X(\nu)$ en fonction de $Y(\nu)$.*
5. *Montrez que pour chaque valeur ν, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que* $\arg(X(\nu)) = -2i\pi\nu + k\pi$, *où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs et négatifs.*
6. *Montrez que*

$$Re(X(\nu)) = TF\left[\frac{1}{2}x(-t) + \frac{1}{2}x(t)\right](\nu)$$

7. *Montrez que $x(t+2) = x(-t)$*

8. *Montrez que*

$$Re(X(\nu)) = \frac{1}{2}X(\nu) + \frac{1}{2}\overline{X(\nu)} = TF\left[\frac{1}{2}x(t+2) + \frac{1}{2}x(t)\right](\nu)$$

où $\overline{z}$ signifie le complexe conjugué de z.

9. *Représentez le graphe de $t \mapsto \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t+2)$*

10. *On pose $x_a(t) = 2\mathbf{1}_{[-1,3]}(t)$ et $x_c(t) = (1-|t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$. En utilisant une construction graphique, montrez que*

$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

Solution :

1. La figure 1.1 a montré que $x(t)$ est symétrique par rapport à $t = 1$. Donc $y(t) = x(t+1)$ est symétrique par rapport à $t = 0$ et est donc pair. On peut aussi réécrire les équations de $x(t)$ en les adaptant à $y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq -2 \\ 2 & \text{si} \quad t \in [-2,-1[\\ 2-t & \text{si} \quad t \in [-1,0[\\ t & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 2 & \text{si} \quad t \in [1,2[\\ 0 & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

   Avec cette écriture, on voit que $y(t) = y(-t)$ et donc que $y(t)$ est pair.

2. $x(t)$ est symétrique par rapport à $t = 1$.

3. $y(t)$ est réel et pair, donc $Y(\nu)$ est réel et donc son argument est soit 0 soit π.

4. $x(t) = y(t-1)$ donc

$$X(\nu) = Y(\nu)e^{-2i\pi\nu} \tag{2.4}$$

5. Il existe $2k' \in \mathbb{Z}$, tel que $\arg(X(\nu)) = \arg(Y(\nu)e^{-2i\pi\nu}) = 2k'\pi + \arg(Y(\nu) + \arg(e^{-2i\pi\nu}) = 2k'\pi + \arg(Y(\nu)) - 2i\pi\nu$ Et comme $\arg(Y(\nu))$ vaut soit 0 soit π, on obtient le résultat souhaité.

6. Grâce à un changement de variable dans l'intégration en $t' = -t$,

$$\begin{aligned} \Re e(X(\nu)) &= \tfrac{1}{2}X(\nu) + \tfrac{1}{2}\overline{X(\nu)} = \tfrac{1}{2}X(\nu) + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2i\pi\nu t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}X(\nu) + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t')e^{-2i\pi\nu t'}\,dt' = \text{TF}\left[\tfrac{1}{2}x(t) + \tfrac{1}{2}x(-t)\right](\nu) \end{aligned} \tag{2.5}$$

7. J'utilise la parité de $y(t)$.

$$x(t+2) = y(t+1) = y(-t-1) = x(-t-1+1) = x(-t) \tag{2.6}$$

8. L'expression s'obtient en remplaçant $x(-t)$ par $x(t+2)$.

9. Il y a une zone de recouvrement entre les deux signaux $x(t)$ et $x(t+2)$. Gauche de la figure 2.2.

```
t=-4:1e-2:4;
x=zeros(size(t));
x(t<=-1)=0;
x((t<=0)&(t>-1))=2;
x((t<=1)&(t>0))=2-t((t<=1)&(t>0));
x((t<=2)&(t>1))=1+t((t<=1)&(t>0));
```

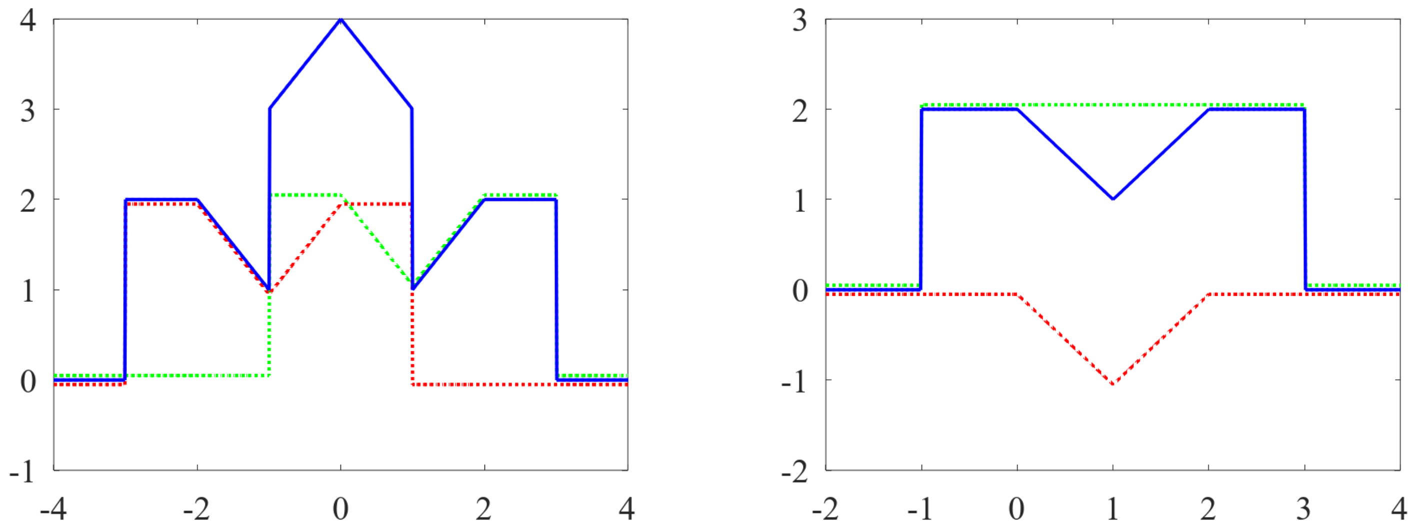


Figure 2.2: Représentations graphiques pour l'exercice 9. À gauche. En pointillé en vert, c'est $x(t)$, en rouge en pointillé c'est $x(t+2) = x(-t)$ et en bleu c'est la superposition $x(t) + x(t+2)$. À droite. En pointillé en vert, c'est $x_a(t)$, en rouge en pointillé c'est $-x_c(t)$ et en bleu c'est la superposition $x_a(t) - x_c(t)$.

```
x((t<=3)&(t>2))=2;
x(t>3)=0;
xp=fliplr(x);
figure(1); plot(t,x+5e-2,'g:','linewidth',2,t,xp-5e-2,'r:','linewidth',2,t,x+xp,'b-','linewidth',
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'./figures/fig_exTS6_1.png');
```

10. Droite de la figure 2.2.

```
t=-2:1e-2:4;
xa=2*((t>=-1)&(t<=3));
tp=t-1;
xc=zeros(size(tp));
xc=(1-abs(tp)).*(abs(tp)<=1);
figure(1); plot(t,xa+5e-2,'g:','linewidth',2,t,-xc-5e-2,'r:','linewidth',2,...
  t,xa-xc,'b-','linewidth',2);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'./figures/fig_exTS6_2.png');
```

Exercice 10 *On considère les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, leur transformée de Fourier est notée $X(\nu)$, $Y(\nu)$, $Z(\nu)$.*

- $x(t) = e^{-2\pi t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$

$$X(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\nu}$$

Son module et son argument sont représentés dans l'exercice 7.

- $y(t) = e^{-2\pi|t|}$
- $z(t) = e^{-|t|}$

1. *Exprimez $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $x(-t)$.*
2. *Montrez que $Y(\nu) = 2\Re e(X(\nu))$ et en utilisant le fait que $\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ montrez qu'ici $|X(\nu)|$ et $|Y(\nu)|$ ont les mêmes sens de variations.*

3. *Exprimez $z(t)$ en fonction de $y(t)$*
4. *Exprimez $Z(\nu)$ en fonction de $Y(\nu)$.*
5. *Représentez $|Z(\nu)|$ et $\arg(Z(\nu))$.*

Solution :

1. Pour $t > 0$, $y(t) = x(t) = x(t) + x(-t)$
   Pour $t < 0$, $y(t) = x(-t) = x(-t) + x(t)$
   Finalement en dehors du cas $t = 0$,
   $$y(t) = x(t) + x(-t) \tag{2.7}$$
   Il se trouve que ce cas $t = 0$ ne modifie pas les calculs des transformées de Fourier.

2. Grâce à un changement de variable $t' = -t$,
   $$\mathrm{TF}[x(-t)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-2i\pi\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2i\pi\nu t}\,dt \tag{2.8}$$
   Comme $x(t)$ est réel, le dernier terme est le conjugué de $X(\nu)$ noté $\overline{X(\nu)}$. Donc
   $$Y(\nu) = \mathrm{TF}[y(t)](\nu) = X(\nu) + \overline{X(\nu)} = 2\Re e(X(\nu)) \tag{2.9}$$
   Le module de $Y(\nu)$ n'est pas le même que le module de $X(\nu)$
   $$|Y(\nu)| = |2\Re e(X(\nu))| = 2|X(\nu)|\ |\cos(\arg(X(\nu)))| \tag{2.10}$$
   D'après l'exercice 7, $\arg(X(\nu)) = -\arctan(\nu)$ aussi
   $$|Y(\nu)| = |2\Re e(X(\nu))| = 2|X(\nu)|\ |\cos(\arctan(\nu))| = \frac{2|X(\nu)|}{\sqrt{1+\nu^2}} \tag{2.11}$$
   Comme d'après l'exercice 7, $|X(\nu)|$ est décroissant pour $\nu > 0$, c'est aussi le cas pour $|Y(\nu)|$.

3. $$z(t) = e^{-|t|} = e^{-2\pi\left|\frac{t}{2\pi}\right|} = y\left(\frac{t}{2\pi}\right) \tag{2.12}$$

4. La propriété de la transformée de Fourier sur la dilatation de l'échelle des temps montre que
   $$Z(\nu) = 2\pi Y(2\pi\nu) \tag{2.13}$$
   $|Z(\nu)|$ est pair et $\arg(Z(\nu)$ est impair. $|Z(\nu)|$ a les mêmes sens de variation que $|Y(\nu)|$ qui est décroissant pour $\nu > 0$. L'argument de $X(\nu)$ étant entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, le signe de $Y(\nu) = \Re e(Y(\nu))$ est positif et donc l'argument de $Z(\nu)$ est 0 quand $|Z(\nu)|$ est non-nul. Le module et la phase sont représentés à gauche et à droite de la figure 2.3.

```
nu=-5:1e-3:5;
X=1/2/pi./(1+i*nu);
Y=2*real(X);
nup=nu*2*pi; Xp=1/2/pi./(1+i*nup); Yp=2*real(Xp);
Z=2*pi*Yp;
figure(1); plot(nu,abs(Z),'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'./figures/fig_exTS7_1.png');
figure(1); plot(nu,angle(Z),'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'./figures/fig_exTS7_2.png');
```

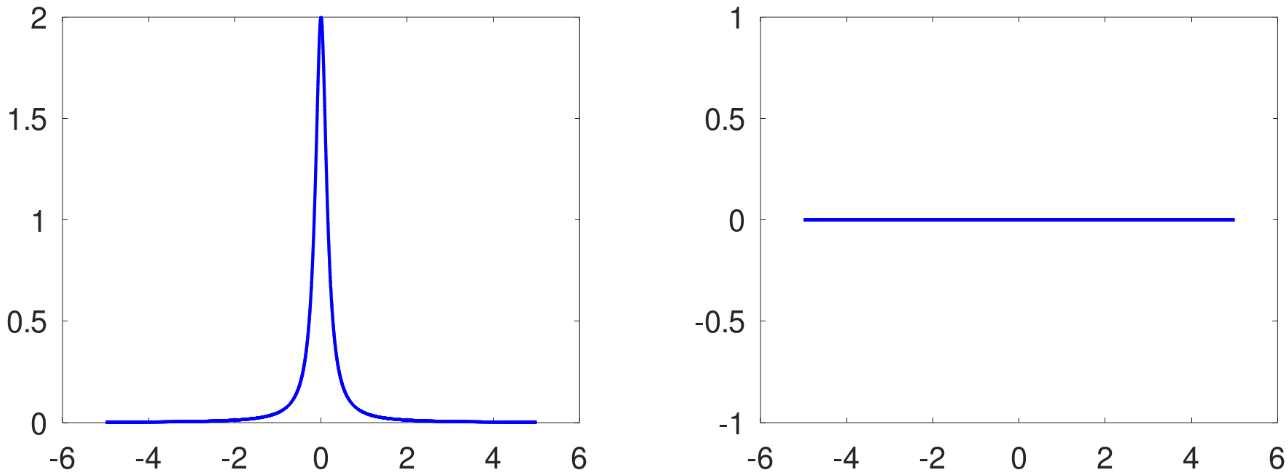


Figure 2.3: Module et argument de $Z(\nu)$ en fonction de ν pour l'exercice 10.

Exercice 11 *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. *On considère le signal* $x_1(t)$ *défini par*

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

À partir de la représentation graphique de $t\Pi(t)$ *obtenue avec l'exercice 4, représentez graphiquement* $x_1(t)$.

Exercice 12 *On considère* $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ *et* $x_2(t) = x_1(t-1)$

1. *Représentez* $x_2(t)$
2. *Calculez* $X_2(0)$

Exercice 13 *On considère* $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

1. *Représentez* $x_3(t) = x_1(t-1) + x_1(-1-t)$
2. *Exprimez* $x_3(t)$ *en fonction de* $x_2(t) = x_1(t-1)$
3. *Représentez* $x_4(t) = x_1(t+1) + x_1(1-t)$
4. *Représentez* $x_5(t) = x_1(t+1) - x_1(1-t)$
5. *Quels sont les signaux pairs et impairs ?*

Exercice 14 *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$ *et* $\mathrm{signe}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$ *Représentez graphiquement*

$$x_1(t) = \sqrt{|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Exercice 15 *On considère* $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ *et* $y(t) = x(2t+3)$.

1. *Trouvez* t_0 *tel que* $y(t)$ *soit symétrique par rapport à* t_0.
2. *Montrez qu'on a alors pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t_0 + t) = y(t_0 - t)$$

Exercice 16 *On considère les signaux* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$, *leur transformées de Fourier sont notées* $X_1(\nu)$ *et* $X_2(\nu)$.

$$x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t), \quad X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu} \text{ et } x_2(t) = x_1(t-1) + x_1(-1-t)$$

1. *Calculez* $X_2(\nu)$
2. *Représentez* $|X_2(\nu)|$

Exercice 17 *On considère un signal défini par*

$$x(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

1. *Représentez graphiquement ce signal.*
2. *On considère un signal* $y(t)$ *et* $z(t)$

$$y(t) = (1 - |t-1|)\,\mathbf{1}_{[0,2]}(t) \text{ et } z(t) = y(t) + 2y(t-1) + y(t-2)$$

Montrez que $z(t)$ *est symétrique par rapport à* $t = 2$.

3. *Vérifiez que* $z(2+t) = z(2-t)$.
4. *Représentez graphiquement* $z(t)$.

Exercice 18 *On définit un signal* $x(t)$ *déjà étudié dans les exercices 1, 9 et 45 (p. 2, p. 7, p. 28) par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

On s'intéresse au calcul de $X(\nu)$. *On pose* $x_b(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ *et* $X_b(\nu) = \mathrm{TF}\left[x_b(t)\right](\nu)$, *et dans l'exercice 46, il sera montré que*

$$X_b(\nu) = \frac{(1 + 2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

1. *On pose* $x_a(t) = 2\mathbf{1}_{[-1,3]}(t)$ *et* $X_a(\nu) = \mathrm{TF}\left[x_a(t)\right](\nu)$. *Sachant que*

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

montrez que

$$X_a(\nu) = 2\frac{\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-2i\pi\nu}$$

2. *Montrez que*

$$\mathrm{TF}[x(-t)](\nu) = \mathrm{TF}[x(t)](-\nu)$$

et que

$$\mathrm{TF}[x(1-t)](\nu) = e^{-2i\pi\nu}\,\mathrm{TF}[x(t)](-\nu)$$

3. *On pose* $x_c(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ *et* $X_c(\nu) = \mathrm{TF}\left[x_c(t)\right](\nu)$. *Montrez en utilisant une construction graphique que*

$$x_c(t) = x_b(1+t) + x_b(1-t)$$

4. *Montrez que*

$$X_c(\nu) = X_b(\nu)e^{2i\pi\nu} + X_b(-\nu)e^{-2i\pi\nu}$$

5. *Montrez que*

$$X_c(\nu) = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$$

6. *Lors de l'exercice 9, il a été montré que*

$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

Montrez alors que

$$X(\nu) = \left(2\frac{\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu} - \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}\right)e^{-2i\pi\nu}$$

Exercice 19 *On considère un signal $z(t)$ défini par*

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-|\tau|}\,d\tau$$

1. *On suppose ici que $t \geq 1$. En utilisant la décroissance de $t \mapsto e^{-t}$ et le fait que $e^{-\tau} \leq e^{-(\tau-1)}$ pour $\tau \in [t-1, t+1]$, montrez que pour $t \geq 1$,*

$$|z(t)| \leq 2e\,e^{-t}$$

En déduire que $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$.

2. *Montrez que $z(t)$ est un signal pair.*

3. *Montrez que*

$$\frac{d}{dt}z(t) = e^{-|t+1|} - e^{-|t-1|}$$

Pour cela, une façon de procéder est de définir un autre signal

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}\,d\tau$$

d'exprimer d'une part $z(t)$ en fonction de $F(t)$ et d'autre part de remarquer que la dérivée de $F(t)$ en t est $e^{-|t|}$.

4. *Montrez que $z(t)$ est décroissante pour $t > 0$.*

5. *Montrez que $z(t)$ a une tangente horizontale en $t = 0$, et une tangente à gauche et à droite de $t = 1$ identiques.*

6. *Représentez graphiquement $z(t)$.*

Chapter 3

Signaux dépendant d'un second paramètre, descripteurs, transformée de Fourier de signaux exponentiels

3.1 Exercices

Exercice 20 *On considère le signal $x_1(t)$ et sa transformée de Fourier notée $X_1(\nu)$.*

$$x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Montrez que $X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}$

Exercice 21 *On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\,t\,e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle ici*

$$t_{\max} = \arg\max_{t\in\mathbb{R}} x_\alpha(t) \text{ et } t_{\min} = \arg\min_{t\in\mathbb{R}} x_\alpha(t)$$

Calculez $t_{\max}$ et $t_{\min}$.

Solution : On remarque que $x_\alpha(t)$ est un signal impair. Pour étudier ses sens de variations, je regarde le signe de la dérivée de $x_\alpha(t)$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}x_\alpha(t) &= \sqrt{e}\left(e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} + t\left(-2\tfrac{t}{\alpha^2}e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{e}\left(1-\tfrac{2t^2}{\alpha^2}\right)e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} = \sqrt{e}(1-\tfrac{\sqrt{2}t}{\alpha})(1-\tfrac{\sqrt{2}t}{\alpha})e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$x_\alpha(t)$ est donc croissant entre 0 et $\frac{\sqrt{2}\alpha}{2}$ et décroissant ensuite.
Et finalement on a

$$\arg\min_t\, x_\alpha(t) = -\frac{\sqrt{2}\alpha}{2} \text{ et } \operatorname{argmax}_t\, x_\alpha(t) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{2} \tag{3.2}$$

Vérification

```
alpha=10*rand(1);
t0=sqrt(2)*alpha/2;
x=@(t)sqrt(exp(1))*t*exp(-t^2/alpha^2);
assert(x(t0-1e-4)<=x(t0));
assert(x(t0+1e-4)<=x(t0));
assert(x(-t0-1e-4)>=x(-t0));
assert(x(-t0+1e-4)>=x(-t0));
```

Exercice 22 *On considère pour $a > 0$, un signal impair et un signal pair définis par*

$$x_a(t) = te^{-at^2} \text{ et } y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. *Montrez que*

$$t_a^{\max} = \underset{t\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmax}}\, x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

2. *Montrez qu'il existe* $t^{(1/2)}$ *défini par*

$$y(t^{(1/2)}) = \frac{1}{2}\max_t y(t)$$

3. *Puis montrez que* $t^{(1/2)} = \sqrt{2\ln(2)}$.

Exercice 23 *On considère le signal* $x(t) = e^{-\pi t^2}$ *dont la transformée de Fourier est* $X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

1. *On définit la largeur à mi-hauteur du spectre*

$$\Delta\nu_x = \nu_2 - \nu_1 \text{ où } |X(\nu_2)| = |X(\nu_1)| = \frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)|$$

   Montrez que $\Delta\nu_x = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}}$

2. *On définit la largeur à mi-hauteur de la densité spectrale*

$$\Delta\nu_0 = \nu_2 - \nu_1 \text{ où } |X(\nu_2)|^2 = |X(\nu_1)|^2 = \frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)|^2$$

   Montrez que $\Delta\nu_o = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{2\pi}}$

3. *On définit la largeur à mi-hauteur de la puissance instantanée*

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 \text{ où } |x(t_2)|^2 = |x(t_1)|^2 = \frac{1}{2}\max_t |x(t)|^2$$

   Montrez que $\Delta\nu_o\Delta t_0 = \frac{2\ln(2)}{\pi}$

4. *On définit* $\Delta\omega_0 = 2\pi\Delta\nu_0$, *calculez* $\Delta\omega_0\Delta t_0$.

Solution :

1. $|X(\nu)|$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, les deux fréquences distinctes dont le spectre est $\frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)|$ sont donc de part et d'autre de $\nu = 0$. Comme $\frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)| = \frac{1}{2}$, ν_1 et ν_2 sont solutions de

$$e^{-\pi\nu^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu = \pm\sqrt{-\frac{1}{\pi}\ln(1/2)} = \pm\sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}} \tag{3.3}$$

   Aussi $\Delta\nu_x = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}}$

2. J'applique la même technique. Comme $\frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)|^2 = \frac{1}{2}$ ν_1 et ν_2 sont solutions de

$$e^{-2\pi\nu^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu = \pm\sqrt{-\frac{1}{2\pi}\ln(1/2)} = \pm\sqrt{\frac{\ln(2)}{2\pi}} \tag{3.4}$$

   Aussi $\Delta\nu_0 = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{2\pi}}$

3. Les équations étant les mêmes, $\Delta t_0 = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{2\pi}}$ Et finalement

$$\Delta\nu_0\Delta t_0 = \left(2\sqrt{\frac{\ln(2)}{2\pi}}\right)^2 = \frac{2\ln(2)}{\pi} \tag{3.5}$$

4.

$$\Delta\omega_0 \Delta t_0 = 2\pi \Delta\nu_0 \Delta t_0 = 4\ln(2) \tag{3.6}$$

Exercice 24 *On considère le signal $x(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrez que $X(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ est sa transformée de Fourier.*
2. *En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}\, d\nu$*

Solution :

1. Je remarque tout d'abord que $x(t)$ est réel et pair et que donc sa transformée de Fourier est réelle et donc $\Re(X(\nu)) = X(\nu)$. Aussi

$$X(\nu) = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi\nu t}\, dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Re\left(e^{-2i\pi\nu t}\right)\, dt = 2\int_{0}^{+\infty} x(t)\Re\left(e^{-2i\pi\nu t}\right)\, dt \tag{3.7}$$

   Et comme $\Re(z) = z + \overline{z}$,

$$X(\nu) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-2i\pi\nu t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{2i\pi\nu t}\, dt = \left[\frac{e^{-(1+2i\pi\nu)t}}{-(1+2i\pi\nu)}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-(1-2i\pi\nu)t}}{-(1-2i\pi\nu)}\right]_0^{+\infty} \tag{3.8}$$

   Finalement on a,

$$X(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu} + \frac{1}{1-2i\pi\nu} = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} \tag{3.9}$$

2. La valeur à l'instant $t = 0$ du signal s'exprime en fonction de sa transformée de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}\, d\nu = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, d\nu = \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2} \tag{3.10}$$

   Vérification

```
nu=-50:1e-6:50;
X=1./(1+4*pi^2*nu.^2);
sum(X)*(nu(2)-nu(1))-0.5,
```

Exercice 25 *On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$. On considère deux signaux.*

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

1. *Calculez les modules des transformée de Fourier de $x_a(t)$ et $x_b(t)$ en utilisant le fait que la transformée de Fourier de $e^{-t}\mathbb{H}(t)$ est $\frac{1}{1+2i\pi\nu}$.*

$$|X_a(\nu)| = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+4\pi^2\nu^2}} \text{ et } |X_b(\nu)| = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b^2+4\pi^2\nu^2}}$$

2. *Représentez $|X_a(\nu)|$ en fonction de ν pour différentes valeurs de a et représentez $|X_a(\nu)|$ en fonction de a pour différentes valeurs de ν. On admet ici que la dérivée partielle de $|X_a(\nu)|$ en fonction de a est égale à*

$$\frac{\partial}{\partial a}|X_a(\nu)| = \frac{4\pi^2\nu^2 - a^2}{2\sqrt{a}\,(a^2+4\pi^2\nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

   (a) *Montrez que $|X_a(\nu)|$ est paire vis-à-vis de ν.*

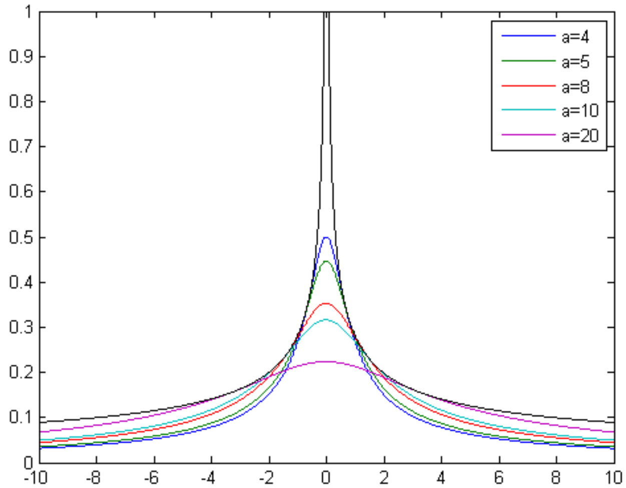


Figure 3.1: $X_a(\nu)$ en fonction de ν pour différentes valeurs de a. Exercice 25

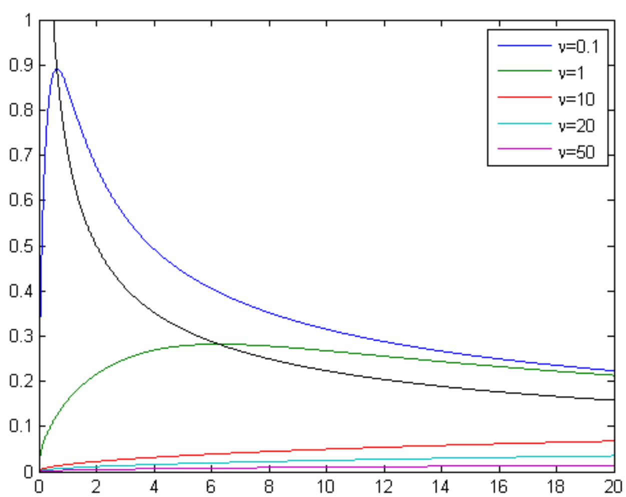


Figure 3.2: $X_a(\nu)$ en fonction de a pour différentes valeurs de ν. Exercice 25

(b) *Montrez que $|X_a(\nu)|$ est décroissante pour $\nu > 0$.*

(c) *Montrez que $|X_a(\nu)|$ est croissante vis-à-vis de a pour $a < 2\pi|\nu|$ et décroissante pour $a > 2\pi|\nu|$.*

(d) *La courbe en noire de la figure 3.1 représente $\left|X_a\left(\frac{a}{2\pi}\right)\right|$, expliquez pourquoi les points de cette courbe sont des maximas des courbes $X_a(\nu)$ à a fixé.*

(e) *La courbe en noire de la figure 3.2 représente $|X_{2\pi|\nu|}(\nu)|$, expliquez pourquoi on observe que lorsqu'on augmente a avec $a' > a$, la courbe $X_{a'}(\nu)$ est au dessus pour la partie à gauche de cette courbe noire et en dessous pour la partie à droite de cette courbe.*

Simulation

1. Je note $x(t) = e^{-t}\mathbb{H}(t)$ et $x_a(t) = \sqrt{a}x(at)$. La transformée de Fourier est alors

$$X_a(\nu) = \sqrt{a}\frac{1}{a}X\left(\frac{\nu}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{1+2i\pi\frac{\nu}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a+2i\pi\nu} \tag{3.11}$$

Le module est alors

$$|X_a(\nu)| = \frac{\sqrt{a}}{|a+2i\pi\nu|} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+4\pi^2\nu^2}} \tag{3.12}$$

(a) $x_a(t)$ est réel donc son module est pair.

(b) Quand on fixe a et qu'on fait varier ν pour $\nu > 0$, le dénominateur est croissant et le numérateur est constant aussi $|X_a(\nu)|$ est décroissante.

(c) Je considère ν fixe. $\frac{\partial}{\partial a}|X_a(\nu)|$ est positif pour $a < 2\pi|\nu|$ et négatif pour $a > 2\pi|\nu|$. Aussi $a \mapsto |X_a(\nu)|$ est croissant entre $]0, 2\pi|\nu|]$ et décroissant pour $a \in [2\pi|\nu|, +\infty[$.

(d) À ν fixé et a variable, on a

$$|X_a(\nu)| \leq \left|X_{2\pi|\nu|}(\nu)\right| \tag{3.13}$$

Cette majoration reste valable dans la figure 3.1 où a est fixe et ν variable, elle s'exprime un peu différemment, il existe pour chaque valeur de a, une valeur $\nu_0 = \frac{a}{2\pi}$ pour la quelle le deux termes coïncident et quand ν est modifiée par rapport à ν_0, la courbe colorée reste en dessous de la courbe noire.

(e) Pour $\nu > 0$, $|X_a(\nu)|$ est décroissant.

- Quand $\nu \leq \frac{a}{2\pi}$, $|X_a(\nu)| \leq |X_a(\frac{a}{2\pi})|$
- Quand $\nu \geq \frac{a}{2\pi}$, $|X_a(\nu)| \geq |X_a(\frac{a}{2\pi})|$

```
X=@(a,nu)sqrt(a)./sqrt(a.^2+4*pi^2*nu.^2);
nu=-10:1e-3:10;
figure(1); plot(nu,X(4,nu),nu,X(5,nu),nu,X(8,nu),nu,X(10,nu),nu,X(20,nu),nu,X((2*pi*abs(nu)),nu),'k');
legend('a=4','a=5','a=8','a=10','a=20');
axis([-Inf Inf 0 1])
%fig_TS19a
X=@(a,nu)sqrt(a)./sqrt(a.^2+4*pi^2*nu.^2);
a=1e-4:1e-4:20;
figure(1); plot(a,X(a,0.1),a,X(a,1),a,X(a,10),a,X(a,20),a,X(a,50),a,X(a,a/2/pi),'k');
legend('\nu=0.1','\nu=1','\nu=10','\nu=20','\nu=50');
axis([0 20 0 1])
%fig_TS19b
```

Exercice 26 *On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\,t\,e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère maintenant $x_a(t) = te^{-at^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.*

1. *Montrez que $x_\alpha(t)$ est impair.*

2. *Qu'en-est-il de la parité de $x_a(t)$?*

Exercice 27 *On considère pour $a > 0$, un signal défini par*

$$x_a(t) = te^{-at^2}$$

En utilisant les exercices 26 et 29, représentez graphiquement $x_a(t)$

Exercice 28

$$y_2(t) = [(b-a) - |t-a-b|]\, \mathbf{1}_{[2a,2b]}(t)$$

Montrez que $y_2(t)$ est symétrique par rapport à $t = a+b$.

Solution :

- Une première solution est de considérer un signal $x(t) = y_2(t+a+b)$ et de montrer que $x(t)$ est pair. Dans ce cas $y_2(t)$ étant retardé de $a+b$, cela veut dire que $y_2(t)$ est symétrique par rapport à $t = a+b$.
  Pour simplifier les calculs j'introduis un nouvel outil

$$\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(t-\gamma) = \mathbf{1}_{[\alpha+\gamma,\beta+\gamma]}(t) \tag{3.14}$$

  La démonstration de cet outil repose sur

$$\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(t-\gamma) = 1 \Leftrightarrow t-\gamma \in [\alpha,\beta] \Leftrightarrow t \in [\alpha+\gamma,\beta+\gamma] \Leftrightarrow \mathbf{1}_{[\alpha+\gamma,\beta+\gamma]}(t) \tag{3.15}$$

  Une justification visuelle simple est que quand on retarde un signal défini par une fonction caractéristique utilisant un intervalle, le signal retardé est aussi défini au moyen de cette fonction caractéristique utilisant l'intervalle retardé.

$$x(t) = y_2(t+a+b) = [(b-a) - |t|]\, \mathbf{1}_{[2a,2b]}(t+a+b) = [(b-a) - |t|]\, \mathbf{1}_{[-(b-a),b-a]}(t) \tag{3.16}$$

  On voit en effet que $x(t)$ est pair.

- Une deuxième solution consiste à démontrer que

$$y_2(a+b-t) = y_2(a+b+t) \tag{3.17}$$

  D'une part, on observe que

$$|(a+b-t)-a-b| = |-t| = |t| = |(a+b+t)-a-b| \tag{3.18}$$

  et d'autre part

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{[2a,2b]}(a+b-t) &= \mathbf{1}_{[-2b,-2a]}(t-a-b) = \mathbf{1}_{[a+b-2b,a+b-2a]}(t) \\ &= \mathbf{1}_{[a-b,b-a]}(t) = \mathbf{1}_{[a-b+a+b,b-a+a+b]}(t+a+b) = \mathbf{1}_{[2a,2b]}(t+a+b)\end{aligned} \tag{3.19}$$

  Ceci prouve bien que $y_2(a+b-t) = y_2(a+b+t)$.

Exercice 29 *On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\, t\, e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Calculez la dérivée et donnez le tableau de variation de $x_\alpha(t)$.*
2. *Tracez la courbe représentative de $x_\alpha(t)$.*

Chapter 4

Signaux gaussiens, techniques de calcul, puissance et énergie de signaux non-périodiques, intégration par partie

4.1 Exercices

Exercice 30 *On considère un signal défini par*

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Représentez graphiquement $y\left(\frac{t}{2}\right)$

Solution : $y(t)$ est pair, croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $y(t/2)$ a les mêmes sens de variations. Figure 4.1. La deuxième courbe est obtenue avec une dilatation de l'échelle des temps d'un facteur 2. Si l'on souhaite être plus précis sur l'allure de la courbe on peut calculer le temps de demi-décroissance qui vaut $\sqrt{2\ln(2)}$ et $2\sqrt{2\ln(2)}$ pour $y(t)$ et $y(t/2)$.

```
t=-3:1e-2:3; tau=t/2;
y=exp(-t.^2/2);
y2=exp(-tau.^2/2);
tdemi=sqrt(2*log(2));
figure(1); plot(t,y,'b-','linewidth',2,[tdemi tdemi],...
  [0 exp(-tdemi.^2/2)],'k:','linewidth',2,t,y2,'r-','linewidth',2,...
[2*tdemi 2*tdemi],[0 exp(-tdemi.^2/2)],'k:','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'./figures/fig_exTS73_1.png');
```

Exercice 31 *Ce signal est une succession de segments joignant les instants* $t = 0, 2, 3$*:* $x(0) = 0$*,* $x(2) = 1$*,* $x(3) = 0$*. Ce signal est nul pour* $t \leq 0$ *et pour* $t \geq 3$*. Ce signal a déjà été étudié lors de l'exercice 2 (p. 3). Calculez l'énergie* E_x*.*

Exercice 32 *Calculez l'énergie du signal* $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

Exercice 33 *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$*. On considère deux signaux* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *définis par*

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

Ces signaux $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *ont été étudiés dans l'exercice 11 (p. 11). Calculez* E_{x_1} *et* E_{x_2}

Exercice 34 *On considère* $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ *et* $x_2(t) = x_1(t-1)$*, déjà étudiés dans l'exercice 12 (p. 11). Calculez l'énergie de* $x_2(t)$ *notée* E_{x_2}*.*

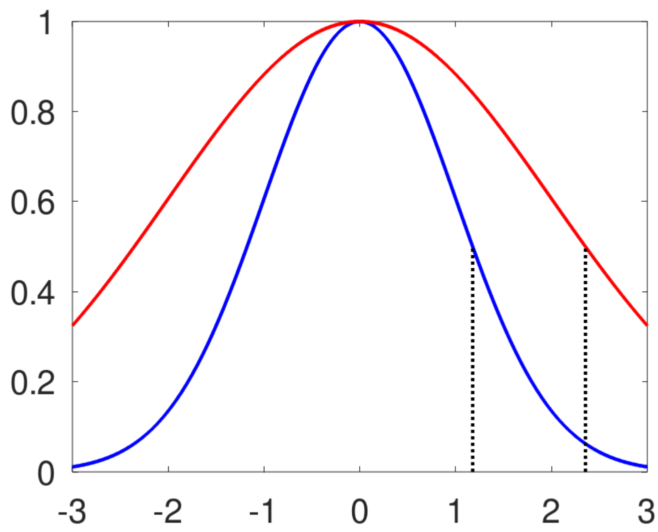


Figure 4.1: Courbe représentatives de $y(t)$ en bleu et de $y(t/2)$ en rouge. Les courbes en pointillés montre que la demi-décroissance est obtenue en $\sqrt{2\ln(2)}$ et en $2\sqrt{2\ln(2)}$.

Exercice 35 *On suppose avoir déjà calculé que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

1. *Montrez que la fontion* $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ *est une fonction holomorphe sauf en* $z = i$ *ou* $z = -i$.

2. *Montrez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+\frac{i}{2})^2} = \pi$$

Exercice 36 *On considère* $x(t) = e^{-\pi t^2}$. *On sait que pour tout* $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

Montrez que l'énergie $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 37 *On considère* $x_\alpha(t) = \sqrt{e}te^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$. *On remarque aussi qu'une primitive de* $te^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$ *est* $-\frac{\alpha^2}{4}e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$. *En utilisant une intégration par partie, montrez que*

$$E_{x_\alpha} = \frac{e\alpha^3\sqrt{2\pi}}{8}$$

Solution :

- On constate en effet que $-\frac{\alpha^2}{4}e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$ est une primitive de $te^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\alpha^2}{4}e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}\right) = \left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(-4\frac{t}{\alpha^2}\right)e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}} = te^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}} \tag{4.1}$$

- On effectue ensuite une intégration par partie sur l'expression obtenue à partir de la définition de l'énergie.

$$\begin{aligned} E_{x_\alpha} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_\alpha(t))^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} et{\times}te^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}\, dt \\ &= \left[et{\times}\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e{\times}\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}\, dt = \frac{e\alpha^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(\frac{\alpha}{2})^2}}\, dt = \frac{e\alpha^2}{4}\sqrt{2\pi}\frac{\alpha}{2} = \frac{e\alpha^3}{8}\sqrt{2\pi} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Exercice 38 *On considère le signal $x(t) = e^{-\pi t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et on veut calculer sa transformée de Fourier notée $X(\nu)$.*

1. *Montrez que*

$$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t+i\nu)^2}\, dt$$

2. *Montrez que*

$$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt$$

3. *Sachant que pour tout $\sigma > 0$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

montrez que $X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

Solution :

1. La définition de la transformée de Fourier montre que

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t}\, dt \tag{4.3}$$

Les propriétés de l'exponentielle et une identité remarquable montrent que

$$e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} = e^{-\pi t^2 - 2i\pi\nu t} = e^{-\pi(t+i\nu)^2 - \pi\nu^2} = e^{-\pi\nu^2} e^{-\pi(t+i\nu)^2 t} \tag{4.4}$$

Comme $e^{-\pi\nu^2}$ ne dépend pas de t, on peut le sortir de l'intégrale et ainsi prouver le résultat souhaité.

2. La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe comme composition de $z \mapsto e^z$ et $z \mapsto -z^2$ qui sont holomorphes. Le cours permet alors d'affirmer le résultat souhaité.

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 1 \tag{4.5}$$

Donc $X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$

Exercice 39 *On considère un signal $x(t)$ dont l'énergie E_x est finie. Montrez qu'alors*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = 0$$

Cette expression est ce qu'on appelle la puissance.

Solution : On constate que pour tout $T > 0$,

$$\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x \tag{4.6}$$

Donc on majore la fonction T-dépendante et positive $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$ par $\frac{E_x}{2T}$ qui est une fonction qui tend vers zéro quand T tend vers l'infini. Ceci prouve le résultat souhaité.

Exercice 40 *On considère le signal $x(t) = \mathbb{H}(t)e^{-2\pi t}$ avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.*

1. *Montrez que $X(\nu) = \frac{1}{1+i\nu}\frac{1}{2\pi}$.*

2. *En utilisant $x(t)$, montrez que $E_x = \frac{1}{4\pi}$.*

3. *En utilisant $X(\nu)$, montrez que*

$$E_x = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2} \tag{4.7}$$

4. *Déduisez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

Solution :

1.

$$X(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \left[\frac{e^{-2\pi(1+i\nu)t}}{-2\pi(1+i\nu)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi(1+i\nu)} \tag{4.8}$$

2.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-4\pi t}\, dt = \left[\frac{e^{-4\pi t}}{-4\pi}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\pi} \tag{4.9}$$

3. D'après le cours,

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\, d\nu \tag{4.10}$$

Ici

$$|X(\nu)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|1+i\nu|^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{1+\nu^2} \tag{4.11}$$

Ce qui permet de trouver le résultat souhaité.

4. En combinant l'équation (4.7) et la valeur de $E_x = \frac{1}{4\pi}$, on trouve l'égalité souhaité.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 4\pi^2\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2}\right) = 4\pi^2 E_x = 4\pi^2\frac{1}{4\pi} = \pi \tag{4.12}$$

Exercice 41 *On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$. On considère deux signaux.*

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Montrez que $x_a(t)$ et $x_b(t)$ ont la même énergie

$$E_{x_a} = E_{x_b} = \frac{1}{2}$$

Solution : Pour montrer qu'ils ont la même énergie, il suffit de montrer que leur énergie ne dépend pas du paramètre a ou b.

$$E_{x_a} = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{a}e^{-ta}\right)^2\, dt = a\int_0^{+\infty} e^{-2ta}\, dt = a\left[\frac{e^{-2ta}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \tag{4.13}$$

Vérification

```
a=10*rand(1);
t=-5-5*a:1e-6:5*a+5;
x=sqrt(a)*exp(-t*a).*(t>0);
sum(x.^2)*(t(2)-t(1))-0.5,
```

Exercice 42 *On considère* $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ *avec* $\alpha > 0$. *Calculez* E_x *à partir de* $x(t)$ *et montrez que* $E_x = \frac{1}{2\alpha}$.

Solution :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}\,dt = \left[\frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha} \tag{4.14}$$

Exercice 43 *On définit un signal* $x(t)$ *déjà étudié dans l'exercice 1 et 9* *(p. 2, p. 7)* *par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Calculez son énergie E_x *et montrez que* $E_x = 12 + \frac{2}{3}$.

Chapter 5

Signaux périodiques, sinus cardinaux et transformées de Fourier de fonctions portes, propriétés de la transformée de Fourier, relations trigonométriques, distribution Dirac

5.1 Exercices

Exercice 44 *On considère* $\alpha \in [0, 1[$ *et un signal* $x_\alpha(t)$ *défini par*

- $x_\alpha(t)$ *est périodique de période* 1
- *Pour* $t \in [0, \alpha[$, $x_\alpha(t) = 1$
- *Pour* $t \in [\alpha, 1[$, $x_\alpha(t) = 0$

On considère $y_\alpha(t) = x_\alpha(t - \frac{1}{2})$.

1. *Tracez les graphes de* $x_\alpha(t)$ *et* $y_\alpha(t)$ *pour* $t \in [-2, 2]$ *en séparant les cas* $\alpha \leq \frac{1}{2}$ *et* $\alpha > \frac{1}{2}$.
2. *Tracez les graphes de* $x_\alpha(0)$ *et* $y_\alpha(\frac{1}{2})$ *pour* $\alpha \in [0, 1[$.
3. *Tracez les graphes de* $x_\alpha(\frac{1}{2})$ *et* $y_\alpha(0)$ *pour* $\alpha \in [0, 1[$.
4. *Montrez que*
   - *si* $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}]}(t)$ *pour* $t \in [0, 1]$
   - *si* $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0, \alpha - \frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(t)$ *pour* $t \in [0, 1]$

Solution :

1. Figure 5.1.

```
t=-2:1e-2:2;
alpha=0.25;
x=zeros(size(t));
tau=t-floor(t);
x(tau<=alpha)=1;
x(tau>alpha)=0;
figure(1); plot(t,x,'b-','linewidth',2); text(alpha,-0.05,'\alpha','FontSize',20);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'fig_exTS20a.png');
t1=t-0.5;
y=zeros(size(t1));
```

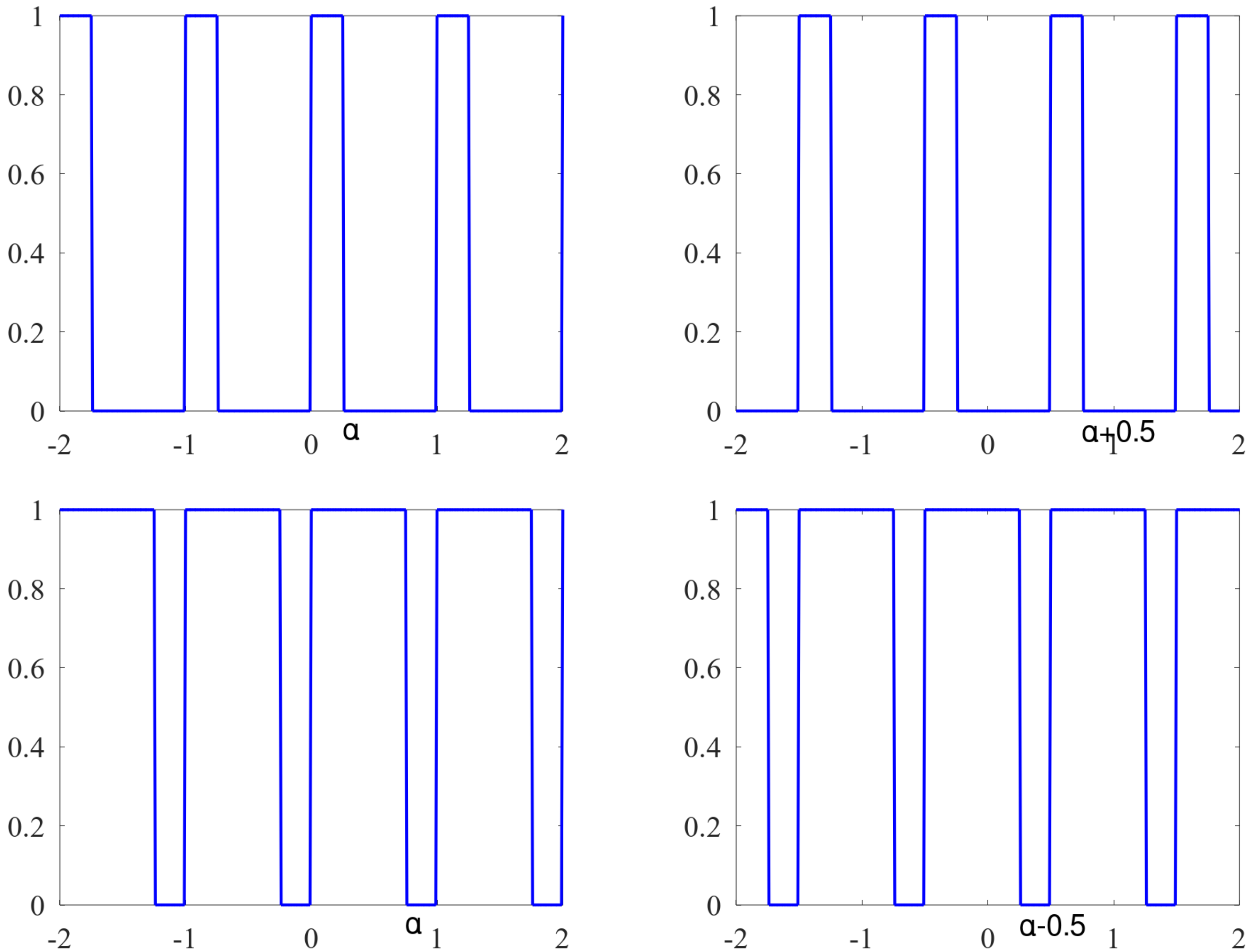
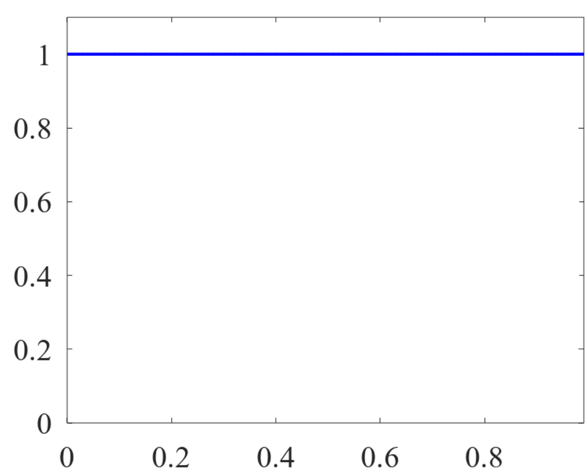


Figure 5.1: À gauche : $x_\alpha(t)$. À droite : $y_\alpha(t)$. En haut $\alpha = 0.25$. En bas $\alpha = 0.75$. Question 1 de l'exercice 44.



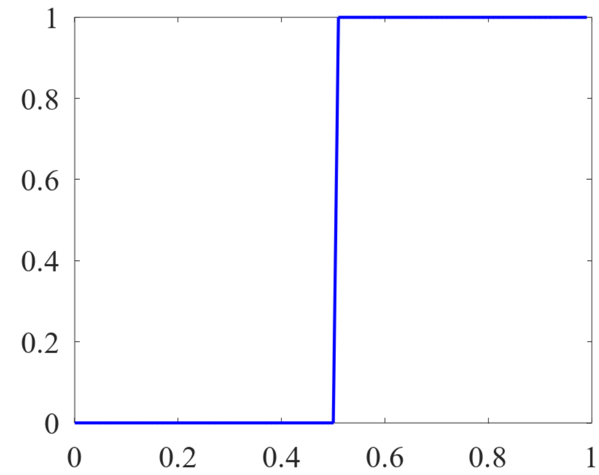


Figure 5.2: Réponse aux questions 2 et 3 de l'exercice 44.

```
tau=t1-floor(t1);
y(tau<=alpha)=1;
y(tau>alpha)=0;
figure(1); plot(t,y,'b-','linewidth',2); text(alpha+0.5,-0.05,'\alpha+0.5','FontSize',20);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'fig_exTS20b.png');
t=-2:1e-2:2;
alpha=0.75;
x=zeros(size(t));
tau=t-floor(t);
x(tau<=alpha)=1;
x(tau>alpha)=0;
figure(1); plot(t,x,'b-','linewidth',2); text(alpha,-0.05,'\alpha','FontSize',20);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'fig_exTS20c.png');
t1=t-0.5;
y=zeros(size(t1));
tau=t1-floor(t1);
y(tau<=alpha)=1;
y(tau>alpha)=0;
figure(1); plot(t,y,'b-','linewidth',2); text(alpha-0.5,-0.05,'\alpha-0.5','FontSize',20);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
saveas(1,'fig_exTS20d.png');
```

2. $y_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = x_\alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = x_\alpha(0) = 1$. Gauche de la figure 5.2.

```
alpha=0:1e-2:1-1e-2;
x=ones(size(alpha));
figure(1); plot(alpha,x,'b-','linewidth',2);
axis([-Inf Inf 0 1.1]);
set(gca,'FontSize',20,'FontName','Times');
saveas(1,'fig_exTS20e.png');
```

3. $y_\alpha(0) = x_\alpha\left(0-\frac{1}{2}\right) = x_\alpha\left(1-\frac{1}{2}\right) = x_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$x_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1[}(\alpha) \tag{5.1}$$

Droite de la figure 5.2.

```
alpha=0:1e-2:1-1e-2;
x=(alpha>0.5);
figure(1); plot(alpha,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20,'FontName','Times');
saveas(1,'fig_exTS20f.png');
```

Exercice 45 *On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans l'exercice 1 et 9 (p. 2, p. 7) par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

1. *En observant que $x(0) = 2$, montrez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, d\nu = 2$$

2. *En s'inspirant de l'exercice 43 (p. 24), montrez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu = 12 + \frac{2}{3}$$

3. *En s'inspirant de l'exercice 9, représentez graphiquement* $\mathrm{TF}^{-1}\left[\Re e(X(\nu)\right](t)$

Solution :

1. D'après le cours (application de la Transformée de Fourier inverse en $t = 0$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, d\nu = x(0) \tag{5.2}$$

et il se trouve que $x(0) = 2$.

2. D'après le cours

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 \, dt = E_x \tag{5.3}$$

Et il se trouve que l'exercice 43 a montré que $E_x = 12 + \frac{2}{3}$.

Exercice 46 *On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans les exercices 1, 9, 18 et 45 (p. 2, p. 7, p. 12, p. 28) par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Dans l'exercice 18 montrant le calcul de $X(\nu)$, il manquait une étape. On pose $x_b(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et $X_b(\nu) =$ $\mathrm{TF}\left[x_b(t)\right](\nu)$*, montrez que*

$$X_b(\nu) = \frac{(1 + 2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

1. *Une première façon de procéder est d'utiliser une intégration par partie.*

$$\int_a^b \left(\frac{d}{dt}u(t)\right) v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\,dt \tag{5.4}$$

2. *Une deuxième façon de procéder est de s'appuyer sur le fait que*

$$TF\left[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-i\pi\nu} \tag{5.5}$$

puis de montrer que

$$TF\left[-2i\pi t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-i\pi\nu}\right) \tag{5.6}$$

Solution :

1. L'intégration par partie montre que

$$\int_0^1 te^{-2i\pi\nu t}\,dt = \left[\frac{te^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\,dt \tag{5.7}$$

La première expression entre crochets vaut :

$$\frac{e^{-2i\pi\nu}}{-2i\pi\nu} = \frac{2i\pi\nu e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} \tag{5.8}$$

La deuxième expression intégrale vaut :

$$\frac{1}{2i\pi\nu}\left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_0^1 = \frac{1}{4\pi\nu^2}\left(e^{-2i\pi\nu}-1\right) \tag{5.9}$$

En regroupant ces deux expressions, on trouve le résultat souhaité.

2. L'équation (5.5) provient de l'application d'un retard de $\frac{1}{2}$ au signal $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$ dont la transformée de Fourier vaut est $\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$. Dans le cours l'équation (5.6) est écrite avec la transformée de Fourier inverse :

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-i\pi\nu}\right)\right](t) = -2i\pi t\mathbf{1}_{[0,1]}(t) \tag{5.10}$$

Et celle-ci permet justement de montrer l'équation (5.6).
L'expression à dériver s'écrit d'une manière plus simple.

$$\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-i\pi\nu} = \frac{e^{i\pi\nu}-e^{-i\pi\nu}}{2i}\frac{e^{-i\pi\nu}}{\pi\nu} = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} \tag{5.11}$$

Et sa dérivée vaut :

$$\frac{2i\pi e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - (1-e^{-2i\pi\nu})2i\pi}{-4\pi^2\nu^2} = (-2i\pi)\frac{(1+2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu}-1}{4\pi^2\nu^2} \tag{5.12}$$

En rapprochant ce dernier résultat avec celui de l'équation (5.6), on trouve le résultat souhaité.

Exercice 47 *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$. *Calculez et représentez graphiquement* $\frac{d}{dt}(t\Pi(t))$

Solution : Je note le signal $x(t) = t\Pi(t)$

- Une première méthode consiste à dériver directement $x(t)$ en considérant d'abord la partie dérivable :

$$\forall t \notin \{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\},\quad \frac{d}{dt}x(t) = \mathbf{1}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t) \tag{5.13}$$

Il y a deux discontinuités, l'une en $t=-\frac{1}{2}$ et l'autre en $t=\frac{1}{2}$. Les deux sont dans le sens descendant et l'amplitude de la discontinuité est de $\frac{1}{2}$. Aussi le résultat est

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\delta\left(t+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{1}{2}\right) + \mathbf{1}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t) \tag{5.14}$$

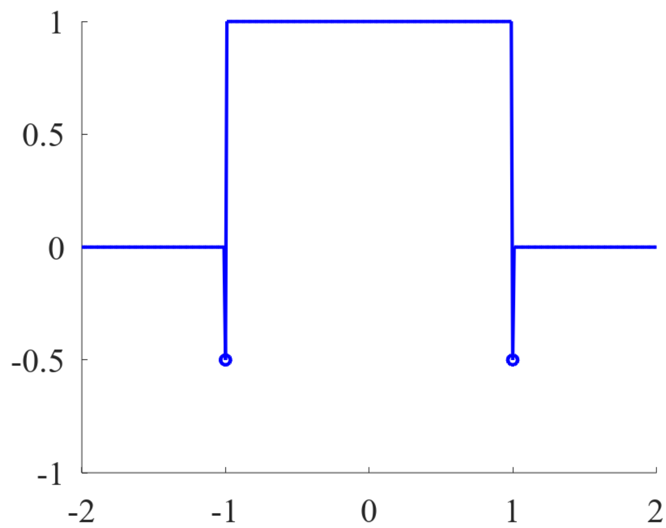


Figure 5.3: Courbe représentative de $x_2(t)$ pour l'exercice 48.

- Une seconde méthode consiste à appliquer la règle de dérivation associée au produit de deux signaux.

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}x(t) &= 1\Pi(t) + t\left(\delta(t+\tfrac{1}{2}) - \delta(t-\tfrac{1}{2})\right) = \Pi(t) + t\delta(t+\tfrac{1}{2}) - t\delta(t-\tfrac{1}{2}) \\ &= \Pi(t) - \tfrac{1}{2}\delta(t+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\delta(t-\tfrac{1}{2}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Exercice 48 *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$*. On considère deux signaux* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *définis par*

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

La représentation graphique de $x_1(t)$ *a été étudiée dans l'exercice 11 (p. 11).*

1. *Représentez graphiquement* $x_2(t)$*.*
2. *Calculez* $X_1(0)$ *et* $X_2(0)$

Solution :

1. Je remarque que $\Pi\left(\frac{t}{2}\right) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et en procédant de la même façon que pour l'exercice 47, on trouve

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) - \delta(t+1) - \delta(t-1) \tag{5.16}$$

Figure 5.3.

```
t=-2:1e-2:2;
x=zeros(size(t));
x(abs(t)<1)=1;
x(t==-1)=-0.5;
x(t==+1)=-0.5;
figure(1); hold on;
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
plot(-1,-0.5,'bo','linewidth',2, +1,-0.5,'bo','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20,'FontName','times');
saveas(1,'./figures/fig_exTS83_1.png');
```

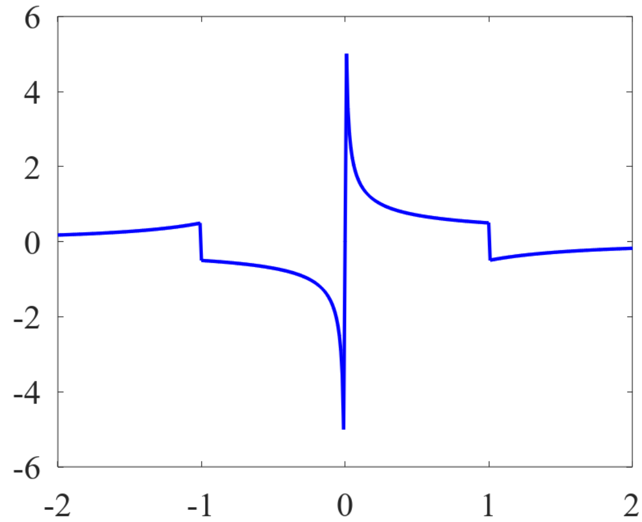


Figure 5.4: Courbe représentative de $x_2(t)$ pour la question 1 de l'exercice 49.

2. $X_1(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,dt = 0$ parce que $x_1(t)$ est impair.
   $X_2(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\,dt = 2\times 1 - 1 - 1 = 0$ en effet la surface étudiée est un rectangle de hauteur 1 et de longueur 2 et contient deux diracs dont la somme des pondérations vaut -2.

Exercice 49 *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$ *et* $\mathrm{signe}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$ *On considère un signal* $x_1(t)$

$$x_1(t) = \sqrt{|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

La représentation graphique de $x_1(t)$ *a déjà été étudiée dans l'exercice 14* *(p. 11)**. On considère* $x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$*.*

1. *Représentez graphiquement* $x_2(t)$*.*
2. *Exprimez* x_2 *en fonction de* $|t|$*,* Π *et* signe*.*

Solution :

1. $x_1(t)$ est pair et n'a pas de discontinuité. Pour $t > 0$, sa dérivée est

$$x_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \frac{1}{2t^{1/3}}\left(1 - \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right) \tag{5.17}$$

   $x_2(t)$ est donc décroissance sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Figure 5.4

```
t=-2:1e-2:2; tau=abs(t);
x=zeros(size(t));
sign=@(t)(t>0)-(t<0);
x((tau>0)&(tau<=1))=1./sqrt(tau((tau>0)&(tau<=1)))/2.*sign(t((tau>0)&(tau<=1)));
x(tau>1)=-1./(tau(tau>1)).^(3/2)/2.*sign(t(tau>1));
figure(1); plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20,'FontName','times');
saveas(1,'./figures/fig_exTS84_1.png');
```

2. $x_2(t)$ est impair du fait que $x_1(t)$ est pair. En prolongeant l'équation (5.17) pour $t < 0$, on obtient

$$x_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{|t|}}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{signe}(t) - \frac{1}{2|t|^{3/2}}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{signe}(t) \tag{5.18}$$

Chapter 6

Signaux à valeurs complexes, approximation, temps moyen

6.1 Exercices

Exercice 50 *On considère un ensemble de signaux $x_n(t) = (it)^n \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Leurs transformées de Fourier sont notées $X_n(\nu)$.*

1. *Calculez $X_n(0)$ et montrez que*

$$X_n(0) = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & si \quad n = 4k \\ 0 & si \quad n = 4k+1 \\ -\frac{2}{n+1} & si \quad n = 4k+2 \\ 0 & si \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

2. *Calculez le temps moyen de x_n*

$$< t_n >= \frac{1}{I_n} \int_{-\infty}^{+\infty} t|x_n(t)|\, dt \;\; et \;\; I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)|\, dt$$

   et montrez que $< t_n >= 0$.

3. *Calculez l'énergie et la puissance de x_n et montrez que $E_{x_n} = \frac{2}{2n+1}$ et $P_{x_n} = 0$.*

Exercice 51 *On considère $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $x(t)$ des signaux périodiques de période 1.*

$$Pour\; t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad \begin{cases} e_1(t) & = & 1 \\ e_2(t) & = & \text{signe}(t) \\ x(t) & = & t\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t) \end{cases}$$

1. *Montrez que $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont orthogonaux pour la puissance.*
2. *Montrez que $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont de norme 1 pour la puissance.*
3. *Trouvez α et β tels que $\widehat{x}(t)$ approche le mieux $x(t)$ sachant que*

$$\widehat{x}(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$$

   Montrez que $\alpha = \frac{1}{8}$ et $\beta = \frac{1}{8}$.

4. *Représentez graphiquement $x(t)$, $\widehat{x}(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$.*

Exercice 52 *On considère $x(t) = e^{-\pi t^2} e^{it}$. Montrez en vous inspirant de l'exercice 36 (p. 21) que l'énergie $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Exercice 53 *On considère le signal* $x(t) = e^{-\pi t^2}\cos(t)$ *Il est souhaitable d'utiliser l'exercice 52 (p. 32). Vous pouvez aussi utiliser le fait que* $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re e(e^{2it})$. *Montrez que l'énergie est* $E_x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2\pi}}\right)$.

Exercice 54 *On considère le signal*

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t}$$

avec $\alpha > 0$ *et* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Par ailleurs on sait que pour* $x_r(t) = e^{-\pi t^2}$, $X_r(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

1. *On définit* $x_1(t) = x_r(t)\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. *Montrez que* $X_1(\nu) = X_r(\nu)\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.

2. *On définit* $x_2(t) = x_1(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}t)$. *Montrez que* $X_2(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\nu^2}$.

3. *On définit* $x_3(t) = x_2(t)e^{i\omega_0 t}$, *montrez que*

$$X(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right)^2}$$

Exercice 55 *On considère un signal complexe* $y(t) = \frac{1}{t+i}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$. *On cherche un spectre de la forme* $Y(\nu) = ae^{-b\nu}\mathbb{H}(\nu)$ *où* $\mathbb{H}(\nu) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\nu)$.

1. *En utilisant la valeur* $y(0) = \frac{1}{i}$, *montrez que* $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$.

2. *Sachant que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi$$

montrez en calculant E_y *que*

$$\frac{|a|^2}{2\Re e(b)} = \pi$$

On peut en effet remarquer que

$$e^{-b\nu} = e^{-\Re e(b)\nu} e^{-i\,\mathrm{Im}(b)\nu}$$

3. *On suppose maintenant que* $\mathrm{Im}(b) = 0$. *Montrez que les deux conditions précédentes,* $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$ *et* $\frac{|a|^2}{2\Re e(b)} = \pi$ *entraînent que*

$$Y(\nu) = \mathbb{H}(\nu)e^{-2\pi\nu}(-2i\pi)$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse à $Y(\nu)$, *montrez qu'on retrouve* $y(t)$.

Chapter 7

Puissance et énergie d'un signal périodique, valeur moyenne d'un signal périodique, coefficients de la série de Fourier, valeur à gauche et à droite, parité, représentation

7.1 Exercices

Exercice 56 *On considère les signaux suivants*

$$x_1(t) = \sin(t\sqrt{2}) \quad x_2(t) = \operatorname{sinc}(t\sqrt{2}) \quad x_3 = (x_1(t))^2$$

1. *Représentez graphiquement* $x_1(t)$
2. *Représentez graphiquement* $x_2(t)$
3. *Représentez graphiquement* $x_3(t)$ *en exprimant* $x_3(t)$ *en fonction de* $\cos(2\sqrt{2}t)$

Exercice 57 *On considère les signaux* $e_1(t)$, $e_2(t)$, $x(t)$, $\widehat{x}(t)$ *définis lors de l'exercice 51* *(p. 32)**. Représentez graphiquement ces signaux.*

Exercice 58 *On considère le signal* $x(t)$ *périodique de période* 2 *et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

1. *Représentez le signal* $x(t)$
2. *Montrez que*

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1})$$

Exercice 59 *On considère un signal périodique de période* 2*, noté* $x(t)$ *et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

On note X_k *les coefficients de la série de Fourier qui sont calculés dans l'exercice 67* *(p. 37)**.*

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k}$$

1. *Calculez sa puissance* P_x *et son énergie* E_x*. Montrez que*

$$P_x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

2. *À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier X_k ?*

3. *Montrez que*

$$P_x = (1-e^{-1})^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 k^2}$$

4. *Montrez que pour tout réels a et b, on a*

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

Et montrez alors que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 k^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-e}{e-1}\right)$$

Exercice 60 *On considère $x(t)$ périodique de période 2 défini par $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ pour $t \in [0,2[$. Les coefficients de la série de Fourier sont $X_k = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}$*

1. *Montrez que*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}(-1)^k = e^{-1/2}$$

2. *Montrez que*

$$1-e^{-1} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-e^{-1}}{1+4\pi^2 k^2}(-1)^k = e^{-1/2}$$

3. *Montrez que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4\pi^2 k^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{e-1} - 1\right)$$

4. *Représentez graphiquement le module et l'argument de la transformée de Fourier.*

Simulation

```
k=1:1e5;
e=exp(1);
s=sum((-1).^k./(1+4*pi^2.*k.^2));
1-1/e+2*(1-1/e)*s-1/sqrt(e),
s-0.5*(sqrt(e)/(e-1)-1),
```

Exercice 61 *On considère $\alpha = \frac{2}{3}$ et $x_\alpha(t)$ un signal périodique de période 1 défini par $x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]}(t)$ pour $t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. On considère $y(t) = 1+\cos(2\pi t)$. Représentez graphiquement $x(t)$ et $y(t)$.*

Exercice 62 *On considère $\alpha \in [0,1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par*

- *$x_\alpha(t)$ est périodique de période 1*
- *Pour $t \in [0,\alpha]$, $x_\alpha(t) = 1$*
- *Pour $t \in]\alpha,1]$, $x_\alpha(t) = 0$*
- *$X_{\alpha,k}$ sont les coefficients de Fourier de $x_\alpha(t)$.*

1. *Calculez la puissance de* $x_\alpha(t)$ *et montrez que*

$$P_{x_\alpha} = \alpha$$

2. *On considère un signal* $y_\alpha(t)$ *périodique de période* 1*, dont les coefficients de Fourier* $Y_{\alpha,k}$ *vérifient*

$$Y_{\alpha,k} = (-1)^k X_{\alpha,k}$$

Calculez la puissance du signal $y_\alpha(t)$ *et montrez que*

$$P_{y_\alpha} = P_{x_\alpha}$$

Exercice 63 *On considère un singal* $x_\alpha(t)$ *périodique de période* 1 *défini par*

$$x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]}(t) \text{ pour } t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$$

On considère une sinusoïde surélevée définie par

$$y(t) = 1 + \cos(2\pi t)$$

1. *À quelle fréquences correspondent les coefficients* X_k *de la série de Fourier ?*
2. *Quelle est la valeur moyenne de* $x_\alpha(t)$*, qu'est-ce que cela nous apprend sur* X_0 *?*
3. *Calculez la puisssance* P_x*.*
4. *Montrez pour* $y(t)$*, la relation entre la puissance* P_y *et la valeur moyenne* $< y(t) >$ *est*

$$P_y = \frac{3}{2} < y(t) >^2$$

5. *Montrez que pour* $\alpha = \frac{2}{3}$*, on a aussi*

$$P_x = \frac{3}{2} < x(t) >^2$$

6. *On considère le signal approchant* $x(t)$*.*

$$\widehat{x}(t) = X_0 + X_1 e^{-2i\pi t} + X_{-1} e^{2i\pi t}$$

avec X_0 *calculé lors de la question* 2 *et* $X_k = \alpha \operatorname{sinc}(\pi k \alpha)$ *pour* $k \neq 0$.

7. *Calculez* $\widehat{x}(t)$ *pour* $\alpha = \frac{2}{3}$*.*
8. *Représentez* $\widehat{x}(t)$*.*
9. *Calculez la puissance* $P_{\widehat{x}}$*.*

Exercice 64 *On considère un signal* $y_\alpha(t)$ *obtenu avec l'exercice* 75 *(p. 42). Il est ainsi défini.*

- *si* $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$ *pour* $t \in [0,1]$
- *si* $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha-\frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$ *pour* $t \in [0,1]$

Montrez que

$$Y_{\alpha,0} = \alpha \text{ et } P_{y_\alpha} = \alpha$$

Exercice 65 *En reprenant l'exercice* 51 *(p. 32), calculez la puissance de* $x(t) - \widehat{x}(t)$ *et montrez que* $P_{x-\widehat{x}} = \frac{1}{128}(1 + \frac{7}{6})$

Chapter 8

Série de Fourier, définition et propriétés, utilisation de la distribution $\delta(\nu)$

8.1 Exercices

Exercice 66 *On considère un singal $x_\alpha(t)$ périodique de période 1 défini par*

$$x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]}(t) \text{ pour } t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$$

1. *Calculez X_k les coefficients de la série de Fourier associée à $x(t)$ et montrez que pour $k \neq 0$, $X_k = \alpha\,\mathrm{sinc}(\pi k \alpha)$ et que $X_0 = \alpha$.*

2. *On approxime $x(t)$ par sa composante continue et sa première harmonique. L'approximation est notée $\widehat{x}(t)$. Montrez que*

$$\widehat{x}(t) = X_0 + X_1 e^{2i\pi t} + X_{-1} e^{-2i\pi t}$$

Exercice 67 *On considère un signal périodique de période 2, noté $x(t)$ et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0,2[$$

1. *À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier X_k ?*

2. *Calculez les coefficients X_k et montrez que*

$$X_k = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}$$

Exercice 68 *On considère le signal $x(t)$ périodique de période 2 et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0,2[$$

Ses coefficients de la série de Fourier sont

$$X_k = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}$$

1. *On considère*

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} X_k$$

   Montrez que

$$S_K = (1-e^{-1})\left[1 + 2\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{1+4\pi^2 k^2}\right]$$

2. *Sachant que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-e}{e-1}\right)$$

montrez que S_K *tend vers* $\frac{1}{2}(1+e^{-1})$ *quand* $K \to +\infty$.

3. *En utilisant*

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1+e^{-1})$$

qui a été montré dans l'exercice 58 (p. 34), donnez deux explications conduisant à cette affirmation.

$$\lim_{K\to+\infty} S_K = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t)$$

- *La première raison est issue du calcul.*
- *La deuxième raison utilise la série de Fourier.*

Chapter 9

Produit de convolution et distribution de Dirac

9.1 Exercices

Exercice 69 *On considère un signal $x(t)$ quelconque et un signal $h(t)$ défini par*

$$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\delta(t) + \left(1 - \frac{b}{a}\right)\sqrt{ab}e^{-bt}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

On définit un signal $y(t)$ par

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Montrez que

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}x(t) + \sqrt{ab}\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{-bt}\int_0^t e^{b\tau}x(\tau)\,d\tau$$

lorsque $x(t)$ est nul pour $t \leq 0$.

Exercice 70 *On considère les signaux suivants :*

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t) \\ y_1(t) = x_1(t) * x_1(t) \\ x_2(t) = \mathbf{1}_{[a,b]}(t) \\ y_2(t) = x_2(t) * x_2(t) \end{cases}$$

1. *Montrez que $y_1(0) = 1$.*
2. *Montrez que $y_1(t)$ est nul pour $|t| > 1$.*
3. *Montrez que $y_1(t)$ est pair.*
4. *Pour $t \in [0, 1]$, montrez que $y_1(t) = 1 - t$.*
5. *En déduire que*

$$y_1(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

La représentation graphique de ce signal est réalisé dans l'exercice 17 (p. 12).

6. *On pose $x_3(t) = x_1(\frac{t}{b-a})$ et $y_3(t) = x_3(t) * x_3(t)$, montrez que*

$$y_3(t) = ((b-a) - |t|)\,\mathbf{1}_{[-(b-a),b-a]}(t)$$

7. *Montrez que*

$$x_2(t) = x_3(t - \frac{a+b}{2})$$

8. *Montrez que*

$$y_2(t) = [(b-a) - |t-a-b|]\, \mathbf{1}_{[2a,2b]}(t)$$

Exercice 71 *On considère* $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ *et* $y(t) = e^{-|t|}$, *on cherche à calculer* $z(t) = x(t) * y(t)$.

1. *Montrez que*

$$z(0) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

2. *Montrez que*

$$z(1) = 1 - \frac{1}{e^2}$$

3. *Montrez que*

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-\tau}\, d\tau$$

   L'étude de $z(t)$ *ainsi défini est faite dans l'exercice 19 (p. 13).*

Exercice 72 *On considère les signaux*

$$x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \text{ et } y(t) = x(t) + 2x(t-1) + x(t-2)$$

On note $a(t) = x(t) * x(t)$ *et on sait que*

$$a(t) = (1 - |t-1|)\, \mathbf{1}_{[0,2]}(t)$$

On cherche à calculer $z(t) = x(t) * y(t)$.

1. *Montrez que*

$$z(t) = a(t) + 2a(t-1) + a(t-2)$$

   L'étude de la symétrie et la représentation graphique de $z(t)$ *est faite dans l'exercice 17 (p. 12).*

Chapter 10

Filtres, définition et propriétés, utilisation des limites

10.1 Exercices

Exercice 73 *On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$. On considère deux signaux.*

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Leurs transformées de Fourier sont notées $X_a(\nu)$ et $X_b(\nu)$.

$$X_a(\nu) = \frac{\sqrt{a}}{a + 2i\pi\nu} \text{ et } X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b + 2i\pi\nu}$$

On considère un filtre linéaire, temps invariant qui transforme $x_a(t)$ en $x_b(t)$. L'énergie de ces signaux a été calculée dans l'exercice 41 (p. 23). Le calcul et la représentation graphique de $X_a(\nu)$ et $X_b(\nu)$ est faite dans l'exercice 25 (p. 16).

1. *Montrez que la réponse fréquentielle du filtre est*

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{a + 2i\pi\nu}{b + 2i\pi\nu}\right)$$

2. *Montrez que $|H(\nu)| = 1$ pour une seule fréquence notée ν_0 qui vaut*

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi}$$

3. *Montrez que $H(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et que*

$$\lim_{\nu \to +\infty} |H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

4. *Montrez que*

$$|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{1 - \frac{(b^2 - a^2)}{b^2 + 4\pi^2\nu^2}}$$

5. *Montrez que*

   - *si $a < b$, $\nu \mapsto |H(\nu)|$ est décroissante de $-\infty$ à 0 et croissante de 0 à $+\infty$, le filtre est un passe-haut ;*

- *si $b < a$, $\nu \mapsto |H(\nu)|$ est croissante de $-\infty$ à 0 et décroissante de 0 à $+\infty$, le filtre est un passe-bas ;*

6. *Représentez graphiquement $|H(\nu)|$ en fonction de ν.*

7. *Montrez que*

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a-b}{b+2i\pi\nu} \right)$$

8. *En observant que $X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b+2i\pi\nu}$, montrez que la réponse impulsionnelle du filtre est*

$$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \delta(t) + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sqrt{ab} e^{-bt} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

9. *En utilisant l'exercice 69, (p. 39), montrez que la relation entrée-sortie peut s'exprimer ainsi*

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} x(t) + \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-bt} \int_0^t e^{b\tau} x(\tau)\, d\tau$$

lorsque $x(t)$ est nul pour $t \leq 0$.

10. *Montrez que si $x(t) = x_a(t)$ alors $y(t) = x_b(t)$.*

Exercice 74 *On considère un filtre dont la relation entréee-sortie est définie par*

$$\frac{d}{dt} y(t) + by(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{d}{dt} x(t) + \sqrt{ab} x(t)$$

Montrez que la réponse fréquentielle est

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a + i2\pi\nu}{b + i2\pi\nu} \right)$$

Exercice 75 *On considère $\alpha \in [0, 1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par*

- *$x_\alpha(t)$ est périodique de période 1*
- *Pour $t \in [0, \alpha]$, $x_\alpha(t) = 1$*
- *Pour $t \in]\alpha, 1]$, $x_\alpha(t) = 0$*
- *$X_{\alpha,k}$ sont les coefficients de Fourier de $x_\alpha(t)$.*

On considère un signal non-périodique $x'_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X'_\alpha(\nu)$.
On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t - \frac{1}{2})$.

- *$y_\alpha(t)$ est la sortie du filtre obtenue lorsqu'en entrée on met $x_\alpha(t)$. Les coefficients de Fourier sont notés $Y_{\alpha,k}$.*
- *$y'_\alpha(t)$ est la sortie du filtre obtenue lorsqu'en entrée on met $x'_\alpha(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $Y'_\alpha(\nu)$.*

1. *Montrez que pour $t \in [0, 1[$,*

$$\forall t \in [0, 1[, \quad x_\alpha(t) = x'_\alpha(t)$$

2. *Montrez que $X_{\alpha,0} = \alpha$*

3. *Calculez la réponse fréquentielle du filtre notée $H(\nu)$ et montrez que*

$$H(\nu) = e^{-i\pi\nu}$$

4. *Montrez que* $y_\alpha(t)$ *est périodique de période* 1.

5. *Montrez que*

$$Y_{\alpha,k} = (-1)^k X_{\alpha,k}$$

   Ceci permet dans l'exercice 62 (p. 35) de trouver les puissances de $x_\alpha(t)$ *et de* $y_\alpha(t)$.

6. *Montrez que*

$$y'_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$$

7. *Montrez que pour* $t \in [0,1[$,

$$y_\alpha(t) = y'_\alpha(t) + y'_\alpha(t+1)$$

8. *Montrez que* $y_\alpha(t) = x_\alpha(t-\frac{1}{2})$. *Ceci permet dans l'exercice 44 (p. 25) de réaliser des représentations graphiques de* $x_\alpha(t)$ *et* $y_\alpha(t)$.

9. *Montrez que*

   - *si* $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$ *pour* $t \in [0,1]$
   - *si* $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha-\frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$ *pour* $t \in [0,1]$

10. *Vérifiez en utilisant cette nouvelle caractérisation de* $y_\alpha(t)$ *qu'on a bien*

$$Y_{\alpha,0} = \alpha \text{ et } P_{y_\alpha} = \alpha$$

Chapter 11

Autocorrélation

11.1 Exercices

Exercice 76 *On cherche à calculer l'autocorrélation, $\varphi_{xx}(t)$ pour $x(t) = e^{-\pi t^2}$. On admet ici que*

$$\mathrm{TF}\left[e^{-\pi t^2}\right](\nu) = e^{-\pi \nu^2}$$

1. *Calculez $s_{xx}(\nu) = \mathrm{TF}[\varphi_{xx}(t)]$ et montrez que*

$$S_{xx}(\nu) = e^{-2\pi\nu^2}$$

2. *Montrez que $S_{xx}(\nu) = X(\sqrt{2}\nu)$*

3. *Montrez que*

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi t^2}{2}}$$

Exercice 77 *On considère $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$, et $y(t) = x(t) * x(t)$.*

1. *Montrez que*

$$y(t) = \left(\int_0^t x(\tau)x(t-\tau)\, d\tau\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

2. *Montrez que*

$$y(t) = te^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Exercice 78 *On considère $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$ et $\varphi_{xx}(t)$ son autocorrélation.*

1. *Montrez que $\varphi_{xx}(-t) = \varphi_{xx}(t)^*$, ici * signifiant le conjugué.*

2. *Pour $t \geq 0$, montrez que*

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} x(\tau)x(\tau - t)^*\, d\tau$$

3. *Montrez que*

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 79 *On considère $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)$ avec $\alpha > 0$. L'autocorrélation de ce signal est déjà calculé et vaut*

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

L'exercice 42 (p. 24) a permis de montrer que $E_x = \frac{1}{2\alpha}$. Calculez $\varphi_{xx}(0)$ et observez que ici

$$E_x = \varphi_{xx}(0)$$

Exercice 80 *On considère* $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ *et* $\varphi_{xx}(t)$ *son autocorrélation.*

1. *Montrez que*

$$\mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi\nu}$$

2. *En exprimant* $\mathrm{TF}[\varphi_{xx}(t)](\nu)$ *en fonction de* $X(\nu)$*, montrez que*

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

3. *Avec l'exercice 79 (p. 44), on sait que* $\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\alpha}$*. À partir de la question précédente et avec* $\alpha = 2\pi$*, montrez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2} = \pi$$

Exercice 81 *En utilisant les exercices 77 et 80 (p. 44 et p. 45), montrez que*

$$TF\left[te^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\right] = \frac{1}{(\alpha + 2i\pi\nu)^2}$$

Chapter 12

Distributions et propriétés

12.1 Exercices

Exercice 82 *On note* $H(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$*. On admet que*

$$\mathrm{TF}\left[H(t)\right](\nu) = \frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

et qu'on a déjà calculé

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

1. *En utilisant que*

$$\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t) = H(t+\frac{1}{2}) - H(t-\frac{1}{2})$$

qui a été calculé dans l'exercice 5 (p. 4), montrez que

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right] = \mathrm{TF}\left[H(t)\right](\nu) \times 2i\sin(\pi\nu)$$

2. *Montrez que* $\delta(\nu)\sin(\pi\nu) = 0$

3. *Montrez que*

$$\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right)2i\sin(\pi\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

Exercice 83 *On considère* $x(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$*,* $y(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ *et* $z(t) = \delta'(t) * x(t)$*. On note* $X(\nu)$*,* $Y(\nu)$ *et* $Z(\nu)$ *les transformées de Fourier de ces trois signaux. On cherche à calculer* $X(\nu)$*, de deux façons différentes. On considère qu'on a déjà calculé*

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

1. *Montrez que*

$$Y(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

2. *En utilisant les expressions de la dérivée d'un quotient de deux fonctions, montrez que*

$$\frac{d}{d\nu}Y(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2}e^{-2i\pi\nu} - \frac{2i\pi}{\nu}e^{-2i\pi\nu}\right)$$

3. *En déduire que*

$$X(\nu) = -\left(\frac{1 - e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}\right)$$

4. *Un calcul mathématique utilisant un développement limité à l'ordre 2 de* $x \mapsto e^x$ *au voisinage de* $x = 0$ *permet d'affirmer que*

$$\lim_{\nu \to 0} X(\nu) = \frac{1}{2}$$

Retrouvez ce résultat en utilisant explicitement $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$

5. *Montrez que*

$$z(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \delta(t-1)$$

6. *Calculez* $Z(\nu)$ *et montrez que*

$$Z(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

7. *Montrez que* $Z(\nu) = 2i\pi\nu X(\nu)$

8. *Déduisez des deux questions précédentes que*

$$X(\nu) = -\left(\frac{1 - e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}\right)$$

Exercice 84 *On considère trois signaux* $x(t)$, $y(t)$ *et* $z(t)$ *définis par*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leur transformée de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$, $Z(\nu)$.

1. *Montrez que*

$$x(t) * y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

2. *Montrez que* $z(t) = t - \frac{1}{2}$

3. *Montrez que*

$$X(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\delta'(\nu)$$

4. *Sachant que* $\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$, *montrez que*

$$Y(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

5. *Pour cette question, on admet d'une part qu'en général pour un signal $f(t)$, on a*

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

D'autre part un calcul mathématique utilisant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$ nous informe que

$$\left.\frac{dY(\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=0} = -i\pi \text{ et } Y(0) = 1$$

La première partie de cette équation signifie que la dérivée en $\nu = 0$ de $Y(\nu)$ vaut $-i\pi$. Montrez alors que

$$Z(\nu) = \frac{i}{2\pi}\delta'(\nu) - \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

6. *Retrouvez $Z(\nu)$ en utilisant que $z(t) = t - \frac{1}{2}$.*

Exercice 85 *On considère les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par*

$$\begin{cases} x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leurs transformées de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$. On admet ici que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{\tau}\right) f(\tau)\, d\tau = \lim_{\epsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-|\epsilon|} \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau + \int_{|\epsilon|}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau\right]$$

1. *Montrez que*

$$z(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \frac{i}{2\pi}\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|$$

2. *Représentez la partie réelle et imaginaire de $z(t)$*

3. *Montrez que*

$$Y(\nu) = -H(\nu) = -\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\nu)$$

4. *Montrez que $Z(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$, représentez $|Z(\nu)|$. On admet ici que $X(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$.*