Introduction au signal et bruit
Exercices

Gabriel Dauphin

September 4, 2025

Contents

Chapter 1

Relations entrées-sorties sans effet mémoire

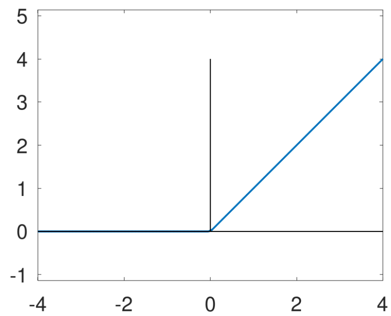

Figure 1.1

Exercice 1 *Le graphique représente la relation entrée-sortie d'un* `Relu` *pour* `Rectified Linear Unit`*.*

1. *En utilisant la figure 1.1, combien valent les signaux en sortie lorsque respectivement, les signaux en entrées valent* -3 *et* 3 *?*

2. *Combien valent les puissances de ces signaux ?*

3. *Proposez une formule utilisant la valeur absolue, l'addition et la multiplication pour modéliser cette relation ?*

4. *On considère le filtre* $\mathcal{H}_1(x) = 0.5x$ *et* $\mathcal{H}_2(x) = |x|$*, montrez comment en les associant on peut fabriquer le filtre* `Relu`*.*

5. *Écrire le pseudo-code permettant de générer la figure 1.1.*

Simulation de la figure 1.1.

```
x=linspace(-4,4,1e2);
y=zeros(size(x));
y(x<=0)=0;
y(x>0)=x(x>0);
figure(1); plot(x,y); figure_jolie(1);
xlabel('x'); ylabel('y'); axis('equal');
saveas(1,'./figures/fig_exSEB6a.png');
```

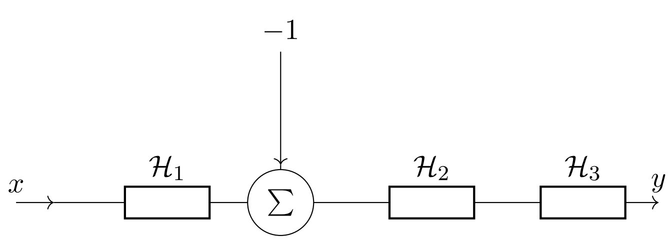

Figure 1.2

Exercice 2 *Les filtres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ sont définis par*

$$\mathcal{H}_1(x) = |x| \quad \mathcal{H}_2(x) = \min(1, x) \quad \mathcal{H}_3(x) = \max(0, x) \tag{1.1}$$

On appelle $\mathcal{H}$ le filtre décrit par la figure 1.2 et associé à la relation transformant x en y.

1. *Calculez les sorties y associées aux valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ pour x.*
2. *Écrivez la formule modélisant $\mathcal{H}$?*
3. *Dessinez la relation transformant x en y sur un graphe.*

Chapter 2

Signaux temps continu, fonction affine par morceaux

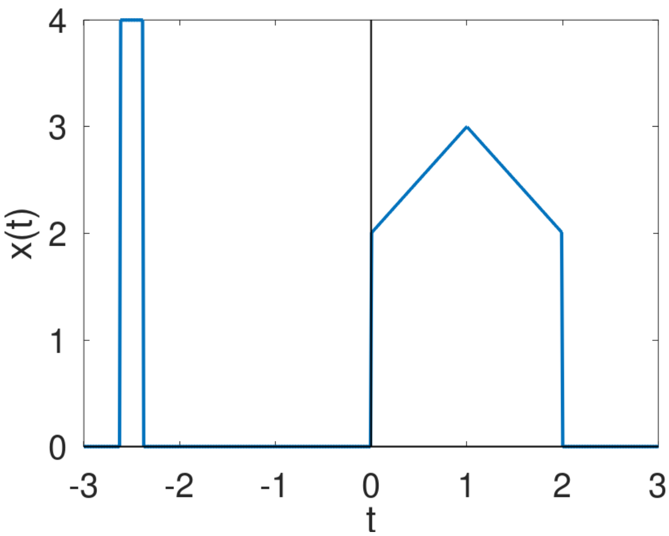

Figure 2.1: Visualisation de $x(t)$ qui a la forme d'une maison avec son lampadaire

Exercice 3 *On considère le signal $x(t)$ décrit par la figure 2.1.*

1. *Calculez les valeurs de $x(t)$ pour les valeurs de t $-2.5, 0.5, 1, 2.5$.*
2. *Écrivez une formule décrivant $x(t)$ au moyen de différents intervalles de temps.*
3. *Utilisez quelques unes des fonctions de base présentées en cours pour définir $x(t)$.*
4. *Utilisez le crochet d'Iverson pour décrire $x(t)$.*

Simulation de la figure 2.1

```
t=linspace(-3,3,500);
x=2*fonction_porte((t-1)/2)+fonction_T(t-1)+4*fonction_porte((t+2.5)*4);
figure(1); plot(t,x); figure_jolie(1);
xlabel('t'); ylabel('x(t)');
saveas(1,'./figures/fig_exSEB8a.png');
```

Exercice 4 *On considère le signal $x(t)$ ainsi défini*

$$x(t) = (at + b) [\![t_1 \leq t \leq t_2]\!] \tag{2.1}$$

1. *Représentez ce signal pour $a = 1$, $b = 0$ et $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.*

2. *Représentez ce signal pour* $a = -1$, $b = 1$ *et* $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

3. *Montrez que pour* $a = 0$, $x(t)$ *peut se mettre sous la forme*

$$x(t) = \alpha\Pi(\gamma t + \delta) \tag{2.2}$$

4. *Montrez que pour* $a > 0$, $x(t)$ *peut se mettre sous la forme*

$$x(t) = \alpha\Pi(\gamma t + \delta) + \beta\mathbb{C}(\gamma t + \delta) \tag{2.3}$$

5. *Donnez un pseudo-code permettant de visualiser de signal.*

Chapter 3

Définition et utilisation de la transformée de Fourier

Exercice 5 *On cherche à déterminer la transformée de Fourier de* $s(t) = e^{-|t|}$.

1. *Calculer la somme et l'énergie de ce signal.*
2. *On note* $s_1(t) = s(t)[\![t \geq 0]\!](t)$. *Calculez la transformée de Fourier de* $s_1(t)$ *notée* $\widehat{S}_1(f)$.
3. *On note* $s_2(t) = s(t)[\![t \leq 0]\!](t)$. *Calculez la transformée de Fourier de* $s_2(t)$ *notée* $\widehat{S}_2(f)$.
4. *On remarque* $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ *pour* $t \neq 0$. *Que peut-on en déduire sur la relation entre* $\widehat{S}(f)$ *et* $\widehat{S}_1(f)$ *et* $\widehat{S}_2(f)$.
5. *Déduisez* $\widehat{S}(f)$.
6. *En établissant le lien avec la première question, déterminez* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 t^2}\, dt$.

Chapter 4

Propriété de la transformée de Fourier

Exercice 6 *Cet exercice cherche à illustrer la notion de parité.*

1. *On considère le signal $s(t) = e^{-|t|}$. Montrez que la transformée de Fourier de ce signal est à valeurs réelles.*
2. *En considérant différents fonctions de bases, proposez un algorithme montrant que la transformée de Fourier d'un signal pair est réel et que la transformée de Fourier d'un signal impair est imaginaire pur.*

Chapter 5

Diracs

Exercice 7 *On considère le signal* $x(t) = \Pi(t) = [\![-0.5 \leq t \leq 0.5]\!](t)$.

1. *Calculez sa dérivée* $y(t)\frac{d}{dt}x(t)$.
2. *Calculez* $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$.
3. *Calculez la transformée de Fourier de* $y(t)$ *notée* $\widehat{Y}(f)$ *et en déduire celle de* $x(t)$ *notée* $\widehat{X}(f)$.
4. *Représentez les signaux* $x(t), y(t), z(t)$.

Solution

1. $y(t) = \delta(t + 0.5) - \delta(t - 0.5)$
2. $z(t) = (t + 0.5)[\![-0.5 \leq t < 0.5]\!](t) + [\![0.5 \leq t]\!](t) = \mathbb{C}(t) + \mathbb{H}(t - 0.5)$
3. $$\widehat{Y}(f) = \mathrm{TF}\left[\delta(t + 0.5)\right](f) - \mathrm{TF}\left[\delta(t - 0.5)\right](f) = e^{j\pi f} - e^{-j\pi f} = 2j\sin(\pi f) \tag{5.1}$$

   Par conséquent,

   $$\widehat{X}(f) = \frac{1}{j2\pi f}\widehat{Y}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f) \tag{5.2}$$

Chapter 6

Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles

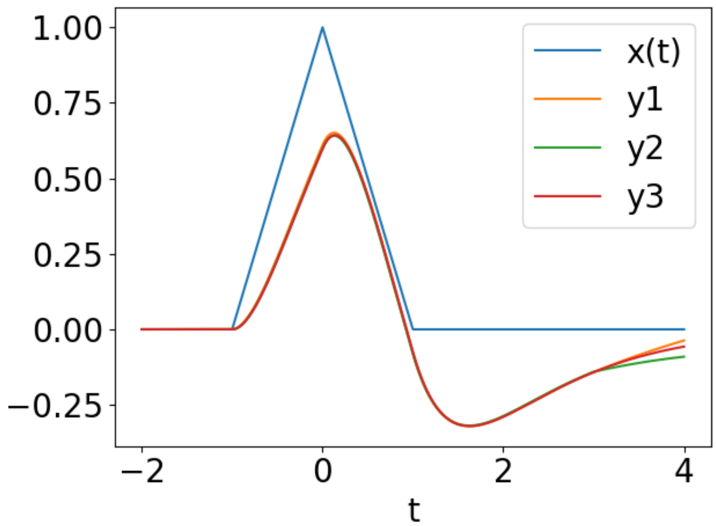

Figure 6.1: Visualisation de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ illustrant l'exercice 8.

Exercice 8 *On considère un filtre défini par l'équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = RC\frac{d}{dt}x(t) \tag{6.1}$$

avec $R = 3$, $C = 0.5$, $L = 1$. On considère un signal en entrée défini par $x(t) = \mathbb{T}(t)$ et on cherche à simuler le signal de sortie $y(t)$ associé à ce filtre décrit par l'équation (6.1).

1. *Montrez que*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau - 1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau + 1)\right] d\tau \tag{6.2}$$

2. *On appelle $\tilde{y}(t)$ la solution de cette deuxième équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + RC\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t) = \delta(t) \tag{6.3}$$

   Exprimez $y(t)$ en fonction de $\tilde{y}(t)$.

3. *En utilisant les fonctions* `sol_eq_diff`, `deriver`, `integrer` *et* `retarder` *de* `seb`, *donnez un pseudo-programme permettant de simuler $y(t)$.*

Solution :

1. On remarque que la fonction triangle dérivée une fois est une fonction porte avancée et une fonction porte retardée, (la porte étant définie $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!]$).

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) \tag{6.4}$$

Dérivée deux fois, ce sont trois, l'un avancé, le deuxième au milieu et un retardé.

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{T}(t) = \delta(t-1) - 2\delta(t) + \delta(t+1) \tag{6.5}$$

En intégrant cette expression, on trouve alors que

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau-1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau+1)\right] \, d\tau \tag{6.6}$$

2.

$$y(t) = RC\int_{-\infty}^{t} \left[\tilde{y}(\tau-1) - 2\tilde{y}(\tau) + \tilde{y}(\tau+1)\right] \, d\tau \tag{6.7}$$

3. Le pseudo-code est donne par

Algorithm 1 générant la figure 6.1.

Rentrer les valeurs de `R,L,C`
Créer une échelle de temps `t` entre -2 et 4 avec 1000 points
Calculer $\tilde{y}(t)$ en utilisant `sol_eq_diff` avec les coefficients LC,RC et 1 et l'échelle de temps `t`.
Utiliser `retarder` pour calculer $\tilde{y}_2(t) = \tilde{y}(t+1) - 2\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t-1)$
Utiliser `integrer` pour calculer $y(t) = RC\int_{-\infty}^{t} \tilde{y}_2(\tau)\, d\tau$

```
def y(R,L,C,t):
  """réponse à une fonction triangle utilisant une equation différentielle"""
  import seb
  y_tilde=seb.sol_eq_diff((L*C,R*C,1),t)
  assert all(y_tilde[t<0]==0)
  y_tilde2=R*C*(seb.retarder(t,y_tilde,-1)-2*y_tilde+seb.retarder(t,y_tilde,1))
  y=seb.integrer(t,y_tilde2)
  return y

R,C,L = 3,0.5,1
t=np.linspace(-2,4,10**3)
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,seb.fonction_T(t),label='x(t)')
ax.plot(t,y(R,L,C,t),label='y')
ax.set_xlabel('t')
ax.legend()
plt.tight_layout()
fig.savefig('./figures/fig_exSeb11_fig1.png')
fig.show()
```

Exercice 9 *On considère un filtre dont la réponse fréquentielle vérifie*

$$\widehat{H}(f) = \frac{j2\pi f\mathtt{RC}}{1 - 4\pi^2 f^2 + 4j\mathtt{RC}\pi f} \tag{6.8}$$

1. *Trouvez l'équation différentielle associée à la relation entrée-sortie ?*

2. *Trouvez l'équation différentielle associée à la réponse impulsionnelle ?*

3. *Proposez un algorithme permettant de caculer la réponse impulsionnelle.*

Exercice 10 *On considère l'équation différentielle associée à une relation entrée-sortie :*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{6.9}$$

1. *Donnez la réponse fréquentielle.*

2. *Donnez un algorithme donnant la réponse impulsionnelle.*

3. *Écrivez le polynôme caractéristique.*

4. *Trouvez les solutions de ce polynôme.*

5. *En déduire la réponse impulsionnelle.*

Chapter 7

Filtres et effet mémoire

Exercice 11 *Dans cet exercice, on cherche à montrer par simulation que*

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \mathbb{T}(t) \tag{7.1}$$

où $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!](t)$ *et* $\mathbb{T}(t) = (1-|t|)[\![|t| \leq 1]\!](t)$.

1. *Montrez que* $\Pi(t) * \Pi(t) = \text{sinc}^2(f)$ *où* $\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.
2. *Proposez un algorithme utilisant la transformée de Fourier pour montrer l'équation (7.1).*
3. *Donnez un autre algorithme utilisant le produit de convolution pour démontrer aussi l'équation (7.1).*

Solution

1. On sait d'après le cours que $\text{TF}\left[\Pi(t)\right](f) = \text{sinc}(f)$.

$$\text{TF}\left[\Pi(t) * \Pi(t)\right](f) = \text{TF}\left[\Pi(t)\right](f)\text{TF}\left[\Pi(t)\right](f) = \text{sinc}^2(f) \tag{7.2}$$

2. L'algorithme proposé utilise le fait qu'on sait d'après le cours que $\text{TF}\left[\Pi(t)\right](f) = \text{sinc}(f)$:

   Créer une échelle de temps `tx` entre -2 et 2 avec 1000 points
   Calculer `x` associé à `tx` en utilisant la fonction `fonction_T` de `seb.py`.
   Créer une échelle de fréquence f entre -3 et 3.
   Calculez la transformée de Fourier de `x` appelé `X`.
   Calculez `X_th` défini par $\widehat{X}_{\text{th}}(f) = \text{sinc}^2(f)$.
   Comparez `X` avec `X_th` en calculant le maximum de la valeur absolue de la différence.

   Algorithm 2: générant la figure **??**.

3. Créer une échelle de temps `tx` entre -2 et 2 avec 1000 points
   Calculer `x` associé à `tx` en utilisant la fonction `fonction_P` de `seb.py`.
   Utilisez `convolution` de `seb.py` pour en déduire $x'(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$ sur l'échelle `tx`.
   Comparer en calculant le maximum de la valeur absolue de la différence entre $x'(t)$ et $\mathbb{T}(t)$.

   Algorithm 3: générant la figure **??**.

Exercice 12 *Dans cet exercice, on cherche à montrer par simulation que*

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \mathbb{T}(t) \tag{7.3}$$

où $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!](t)$ *et* $\mathbb{T}(t) = (1-|t|)[\![|t| \leq 1]\!](t)$.

1. *On note* $s(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, *donnez une expression intégrale à* $s(t)$.
2. *Montrez que pour* $t < -1$, $s(t) = 0$.
3. *Montrez que* $s(-t) = s(t)$ *et que donc* $s(t)$ *est un signal pair.*

4. *En déduire que pour* $t > 1$, $s(t) = 0$.

5. *Montrez que* $s(0) = 1$.

6. *Montrez que* $s(t) = 1 - t$ *pour* $t \in [0, 1]$.

7. *Déduisez que* $s(t) = \mathbb{T}(t)$.

Chapter 8

Description fréquentielle des filtres

Chapter 9

Signaux périodiques

Chapter 10

Filtres agissant sur des signaux périodiques

Chapter 11

Échantillonnage d'un signal non-périodique

Chapter 12

Peigne de Diracs

Chapter 13

Modélisation stochastique du bruit

Chapter 14

Filtrage des processus aléatoires

Chapter 15

Autocorrélation et densité spectrale

15.1 Exercices

Exercice 13 *Le signal montré sur la figure 15.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Donnez une expression de $x(t)$ sous la forme de sa description sur plusieurs intervalles.*
3. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
4. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
5. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
6. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
7. *Construire $y_1(t) = x\left(t-1\right)$*
8. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$*
9. *Construire $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$*

Simulation générant la figure 15.1 de l'exercice 13

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=3/2*t.*(t>=0).*(t<=2)+(4-t)*3/2.*(t>2).*(t<=4);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB1_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 14 *Le signal montré sur la figure 15.2 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 15.2.*
3. *Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 15.2.*
4. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*

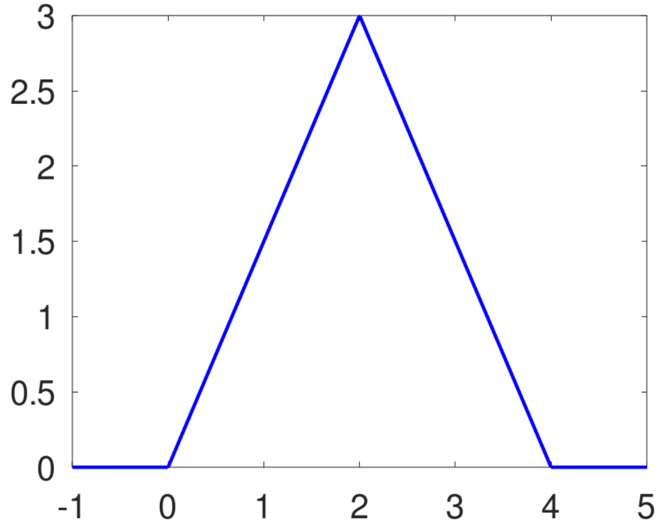

Figure 15.1: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 13.

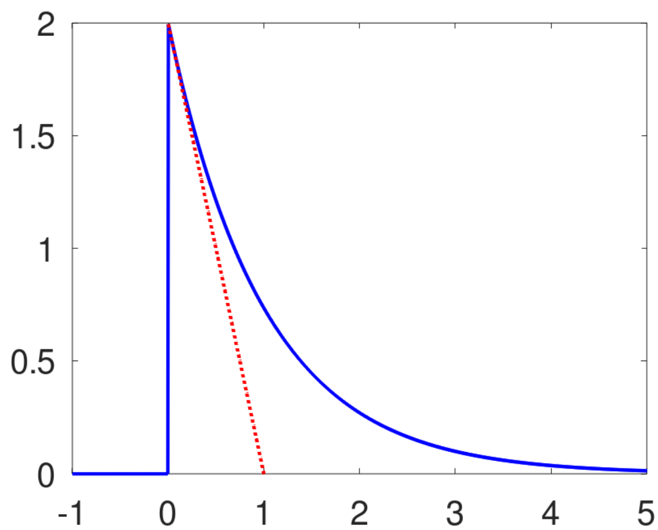

Figure 15.2: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 14.

6. *Calculez* $\widehat{X}(0)$ *et* $\widehat{X}(1)$.
7. *Construire* $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
8. *Construire* $y_1(t) = x\left(t-1\right)$
9. *Construire* $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$
10. *Construire* $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*exp(-t).*(t>=0);
t_tg=t((t>=0)&(t<=1));
x_tg=2-2*t_tg;
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2,t_tg,x_tg,'r:','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB2_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 15 *Le signal étudié ici est* $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0,1[) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1,2[)$ *On considère* $y(t)$ *obtenu en périodisant le signal* $x(t)$ *pour* $t \in [0,3]$.

1. $x(t)$ *est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. $y(t)$ *est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
3. *Dessiner* $x(t)$ *pour* $t \in [-1,5]$ *sur un graphe.*
4. *Dessiner* $y(t)$ *pour* $t \in [-1,5]$ *sur le même graphe.*
5. *Calculez* $x(0)$, $x(-2)$, E_x *et* P_x.
6. *Calculez* $y(0)$, $y(-2)$, E_y *et* P_y.
7. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{Y}_0$.
8. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{Y}_0$.
9. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$
10. *Dessiner sur le graphe* $y_2(t) = y\left(t-1\right)$
11. *Dessiner sur le graphe* $y_3(t) = \frac{1}{2}y\left(t\right)$
12. *Dessiner sur le graphe* $y_4(t) = y\left(t\right) - y\left(t-2\right)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+0.5*pi);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB3_fig1.png');
```

Solutions

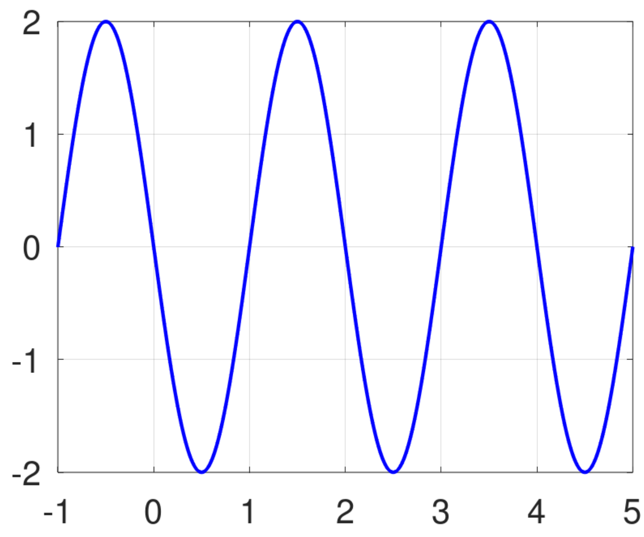

Figure 15.3: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 16.

1.

Exercice 16 *Le signal montré sur la figure 15.3 est noté* $x(t)$*. Sa transformée de Fourier est notée* $\widehat{X}$*. Ce signal est de la forme* $x(t) = a\cos(bt + c)$*.*

1. $x(t)$ *est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de* a *en observant la valeur maximale et minimale sur la figure 15.3.*
3. *Justifiez la valeur de* b *en mesurant la période sur la figure 15.3.*
4. *Justifiez la valeur de* c *en interprétant cette courbe comme en retard (ou en avance) par rapport à* $a\cos(bt)$ *sur la figure 15.2.*
5. *Calculez* $x(0)$, $x(1)$, P_x*.*
6. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{X}_1$*.*
7. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
8. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(t-1\right)$
9. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$
10. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+pi/2);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
grid;
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB4_fig1.png');
```

Solutions

1.

2. $a = 2$
3. $b = \pi$
4. $c = \frac{\pi}{2}$.