Examen Matlab
Institut Galilée
2018-2019

CORRECTION

L'épreuve dure une heure. Seul les version numérique du polycopié de Matlab (et de TNS) sont autorisées, elle est disponible sur

`http://www-l2ti.univ-paris13.fr/~dauphin/m1ir`

L'ensemble des réponses doivent figurer sur la feuille d'examen sans utiliser de brouillon. Les réponses consistent en les valeurs numériques ainsi que les programmes qui ont permis d'obtenir ces valeurs numériques. [1]
NOM :
Prénom :

Exercice 1 () *On considère un signal temps continu périodique défini sur $\mathbb{R}$ par*

$$s(t) = e^{-2\sin(2\pi t)}$$

Ce signal $s(t)$ est échantillonné à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e} = 143$Hz. Quelle est la puissance de ce signal échantillonné avec 7 chiffres significatifs ? Pour rappel, la puissance d'un signal temps discret périodique de période $T = NT_e$ est :

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e)^2$$

Solution : $s(t)$ est périodique de période 1. Le signal échantillonné est donné par $s(nT_e)$ est lui périodique de période $NT_e = 1$ aussi $N = \frac{1}{T_e} = f_e = 143$. En prenant N un multiple de la période ou un nombre très grand devant 143, on aurait le même résultat ou à peu près le même résultat.

```
s=@(t)exp(-2*sin(2*pi*t));
fe=143;
t=0:1/fe:(1-1/fe);
N=length(t);
P=1/N*sum(s(t).^2),
```

11.301921952136333

Pour vérifier le calcul, on peut tester en considérant une signal $s(t)$ sur une durée de 3s échantillonnée à 143Hz avec

```
s=@(t)exp(-2*sin(2*pi*t));
fe=143;
t=0:1/fe:(3-1/fe);
N=length(t);
P=1/N*sum(s(t).^2),
```

On peut aussi considérer le signal $s_1 = s(2t)$ dont la puissance n'est pas modifiée.

```
s=@(t)exp(-2*sin(2*pi*2*t));
fe=143;
t=0:1/fe:(1-1/fe);
N=length(t);
P=1/N*sum(s(t).^2),
```

On peut aussi vérifier le bon fonctionnement de l'algorithme en considérant un cas simple. Par exemple si $f_e = 2$Hz, $T_e = 1/2$s et donc le signal échantillonnée est en fait $s_n = e^0 = 1$ et la puissance vaut 1.

[1] Il convient de faire attention que parmi les erreur fréquentes, il y a l'oubli d'un point avant $\star$ ou / qui est parfois nécessaire. De même l'ordre des instructions a de l'importance.

```
s=@(t)exp(-2*sin(2*pi*t));
fe=2;
t=0:1/fe:(1-1/fe);
N=length(t);
P=1/N*sum(s(t).^2),
```

On pourrait aussi considérer le cas où $f_e = 4$Hz. $s_n = \{1, e^{-2}, 1, e^2\}$. La puissance d'un tel signal vaut alors $P = 1/4 * (1 + e^{-4} + 1 + e^4) = 14.154116418008243$

```
s=@(t)exp(-2*sin(2*pi*t));
fe=4;
t=0:1/fe:(1-1/fe);
N=length(t);
P=1/N*sum(s(t).^2),
```

On peut aussi reprendre le calcul de base et vérifier que pour $s_2 = 2s(t)$, la puissance est bien multipliée par 4.

Exercice 2 () *On considère un signal temps discret périodique s_n de fréquence d'échantillonnage $f_e = 32$Hz et dont la période est de $N = 8$ échantillons*

$$s_0 = 6.8,\ \ s_1 = 7.6,\ \ s_2 = 7.5,\ \ s_3 = 4,\ \ s_4 = 6.6,\ \ s_5 = 1.8,\ \ s_6 = 7.1,\ \ s_7 = 0.4,$$

Donnez le coefficient complexe associé à la fréquence $f_2 = 2\frac{f_e}{8} = 8$Hz avec 4 chiffres significatifs. Pour rappel, le coefficient complexe $\widehat{S}_k$ associée à la fréquence $f_k = k\frac{f_e}{N}$ est :

$$\widehat{S}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Solution : en comparant f_k avec f_2, on observe que $k = 2$, c'est-à-dire que le coefficient à calculer est le troisième (le premier correspond à 0Hz, le deuxième à 4Hz, le troisième à 8Hz). Il faut faire attention à l'ordre des parenthèses. Ici $N = 8$ car le signal est périodique de période 8.

```
sn=[6.8, 7.6, 7.5, 4, 6.6, 1.8, 7.1, 0.4];
N=length(sn);
k=2;
S=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
```

-0.150000000000000 - 0.625000000000000i

Pour vérifier le calcul, on aurait pu vérifier qu'avec `fft`, on obtient le même résultat :

```
sn=[6.8, 7.6, 7.5, 4, 6.6, 1.8, 7.1, 0.4];
N=length(sn);
Sk=fft(sn)/length(sn);
Sk(3),
```

On peut aussi vérifier que le calcul fonctionne aussi pour des valeurs de k pour lesquelles on connait le résultat. Par exemple, on sait d'après le cours que $S_0 = S_8$ est la moyenne du signal s_n.

```
sn=[6.8, 7.6, 7.5, 4, 6.6, 1.8, 7.1, 0.4];
N=length(sn);
k=0;
S=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
S-mean(sn),
k=8;
S=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
S-mean(sn),
```

On peut vérifier qu'on a bien $S_1 = \overline{S_7}$

```
sn=[6.8, 7.6, 7.5, 4, 6.6, 1.8, 7.1, 0.4];
N=length(sn);
k=1;
S1=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
k=7;
S7=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
S1-conj(S7),
```

On peut vérifier qu'on a bien $S_4 = S_{12} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^n s_n$

```
sn=[6.8, 7.6, 7.5, 4, 6.6, 1.8, 7.1, 0.4];
N=length(sn);
k=4;
S4=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
k=12;
S12=sum(sn.*exp(-j*2*pi*(0:N-1)*k/N))/N,
S4-S12,
S_ver=mean(sn.*(-1).^(0:(N-1)));
S4-S_ver,
```

Exercice 3 () *Donnez une approximation avec trois chiffres significatifs de :*

$$\int_1^3 \left(\frac{t+1}{t+4}\right)^2 dt$$

Solution :

```
fe=1e5;
t=1:1/fe:(3-1/fe);
delta_t=1/fe;
s=@(t)((t+1)./(t+4)).^2;
sum(s(t)*delta_t),
```

0.49545

Pour s'assurer que le calcul est exact, on peut vérifier que

$$I = \int_1^2 \left(\frac{t+1}{t+4}\right)^2 dt + \int_2^3 \left(\frac{t+1}{t+4}\right)^2 dt$$

```
fe=1e5;
t=1:1/fe:(2-1/fe);
delta_t=1/fe;
s=@(t)((t+1)./(t+4)).^2;
I1=sum(s(t)*delta_t);
fe=1e5;
t=2:1/fe:(3-1/fe);
delta_t=1/fe;
s=@(t)((t+1)./(t+4)).^2;
I2=sum(s(t)*delta_t);
I1+I2,
```

On peut aussi effectuer un changement de variable $u = \frac{t}{2}$.

$$I = 2\int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{2u+1}{2u+4}\right)^2 \, du$$

```
fe=1e5;
t=(1/2):1/fe:(3/2-1/fe);
delta_t=1/fe;
s=@(t)((2*t+1)./(2*t+4)).^2;
I=2*sum(s(t)*delta_t),
```

Une vérification simple qui est efficace consiste à appliquer l'algorithme au calcul d'une intégrale dont on connait le résultat.

$$J = \int_1^3 t\, dt = (3^2/2 - 1^2/2) = 4$$

```
fe=1e5;
t=1:1/fe:(3-1/fe);
delta_t=1/fe;
s=@(t)t;
I=sum(s(t)*delta_t);
I-4,
```

Il se trouve d'ailleurs que le calcul demandé pouvait se faire analytiquement.

$$I = \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{t+4}\right)^2 dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{6}{t+4} + \frac{9}{(t+4)^2}\right) dt$$
$$= \left[t - 6\ln(t+4) - \frac{9}{t+4}\right]_1^3 = 2 - 6\ln\left(\frac{7}{5}\right) - 9\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) = 2 - 6\ln\left(\frac{7}{5}\right) + \frac{9\times 2}{5\times 7}$$

```
I=2-6*log(7/5)+9*2/5/7
%0.495452294558438,
```

Les différents exercices utilisent des fonctions Matlab parmi celles-ci

```
cos,sin,plot,:,format,long,abs,sum,sqrt,pi,inv,sqrt,randn,min,
max,@,figure,log,real,exp,.*,./,+,-,*,/,',
```