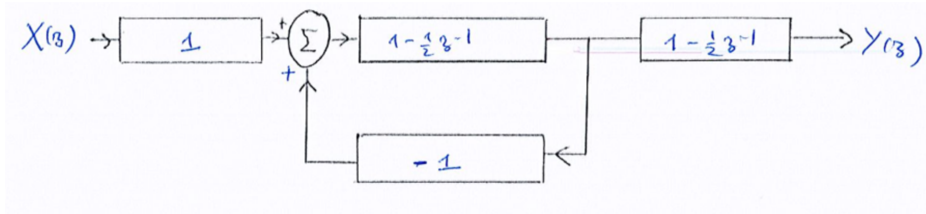

Figure 1: images de l'exercice 8

Examen de traitement numérique du signal

Durée : 1h30
Une copie double manuscrite est autorisée. La calculatrice et le téléphone portable sont interdits.
NOM : Prénom :

θ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$e^{j\theta}$	1		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}(1-j+j\sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}$	j

Exercice 1 *() Trouvez en observant la figure 4 la fonction de transfert transformant $X(z)$ en $Y(z)$.*

Solution :

$$H(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{2-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Exercice 2 *() Faites la synthèse d'un filtre numérique passe-bas de Butterworth à l'ordre 1 pour la fréquence de coupure $f_c = 1\text{Hz}$. La fréquence d'échantillonnage est $f_e = 5\text{Hz}$. Donnez la fonction de transfert du filtre ainsi synthétisé et la relation entrée-sortie de ce filtre.*

Solution :

$$H(z) = \frac{(1+\sqrt{5})(1-z^{-1})}{(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+1+\sqrt{5})+(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(1+\sqrt{5}))z^{-1}}$$

$$(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+1+\sqrt{5})y_n + (\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(1+\sqrt{5}))y_{n-1} = (1+\sqrt{5})(x_n - x_{n-1})$$

```
t=sqrt(10-2*sqrt(5))/(1+sqrt(5)); t-tan(pi/5),
B=(1+sqrt(5))*[1 -1];
A=[sqrt(10-2*sqrt(5))+(1+sqrt(5)) sqrt(10-2*sqrt(5))-(1+sqrt(5))];
H=freqz(B,A,[0 100 250],500);
H,
```

Exercice 3 *() On considère le filtre défini par la réponse impulsionnelle $h_n = 0.5$ si $n = 0$, $h_n = -0.5$ si $n = 1$ et $h_n = 0$ sinon. La fréquence d'échantillonnage est de $fe = 100\text{Hz}$. On considère le signal $x_n = 2\delta_n - \delta_{n-4}$*

1. *Quelle est la transformée en Z ?*
2. *Quelle est la relation entrée-sortie ?*
3. *On applique à ce filtre l'entrée x_n, calculez la sortie y_n ?*
4. *Représentez sur un graphique y_n en indiquant précisément l'échelle des abscisses.*

Solution :

1. $H(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}$
2. $y_n = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n-1}$
3. $y_n = \delta_n - \delta_{n-1} - \frac{1}{2}\delta_{n-4} + \frac{1}{2}\delta_{n-5}$
4. `fe=100; tn=0:1/fe:6/fe; yn=[1 -1 0 0 -1/2 1/2 0]; figure(1); plot(tn,yn,'s'); axis([-0.1/fe 6.1/fe -1.5 1.5]); line([0 0],ylim); line(xlim,[0 0])`

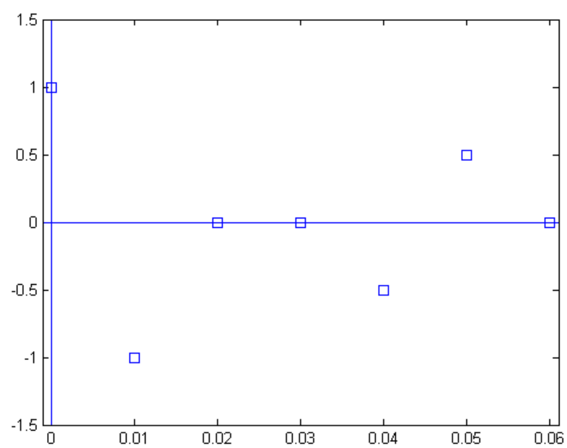

Figure 2: Corrige: signal y_n Exercice 3

Exercice 4 *() On considère le signal $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$, calculez l'autocorrélation de ce signal en $t = \frac{1}{2}$*

Solution :

$$\gamma_x(1/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-1/2)dt = 7/4$$