Examen traitement numérique du signal
Télécom 2 et Instrumentation 2

Lundi 6 janvier 2025

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

Exercice 1. *()*

On considère un filtre défini par

$$ay_n + by_{n-1} = cx_n + dx_{n-1} \tag{1}$$

Choisissez a, b, c, d *tels que la moyenne de la sortie soite égale à lamoyenne de l'entrée et tels que si* $x_n = (-1)^n$ *alors* $y_n = 0$.

Solution :

La première contrainte signifie que $\widehat{H}(0) = H(1) = 1$, la deuxième contrainte signifie que $\widehat{H}\left(\frac{f_e}{2}\right) = H(-1) = 0$. Comme la fonction de transfert de ce filtre est

$$H(z) = \frac{c + dz^{-1}}{a + bz^{-1}} \tag{2}$$

les deux contraintes signifient que

$$\frac{c+d}{a+b} = 1 \text{ et } \frac{c-d}{a-b} = 0 \tag{3}$$

Je choisis $a = 1$ et $b = 0$ et les contraintes conduisent à $c = d = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. *()*

On considère un signal $x(t)$ *temps continu périodique de période* 1 *défini par*

$$x(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\\ \\ 0 \quad si \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[\bigcup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\end{cases} \tag{4}$$

Le calcul de sa transformée de Fourier montre que

$$\widehat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f-k) \quad avec \quad \begin{cases} a_0 = 0.5 \\ \\ a_k = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k} \end{cases} \tag{5}$$

On cherche à approximer $x(t)$ *avec l'addition d'un signal sinusoïdal et d'une composante continue.*

1. *Un premier raisonnement consiste à approcher* $x(t)$ *en considérant dans* $\widehat{X}(f)$ *la composante continue et la première harmonique. Il conduit à*

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi t) \tag{6}$$

Justifiez et détaillez ce calcul.

2. *Un deuxième raisonnement consiste à chercher $z(t) = a + be^{j2\pi t} + ce^{-j2\pi t}$ avec a, b, c choisis de façon que $z(0) = x(0)$ et $z(0.5) = x(0.5)$. Détaillez un calcul permettant de trouver une solution. Calculez alors $z(t)$.*

3. *Expliquez clairement avec la notion de* repliement spectral *la différence entre les deux signaux obtenus.*

Solution :

Vérification de la question

```
k=-500:500;
ak=ones(size(k))*0.5;
ak(k~=0)=sin(pi*k(k~=0)/2)./k(k~=0)/pi;
t_l=-2:1e-2:2;
x_l=zeros(size(t_l));
for t_=1:length(t_l)
  t=t_l(t_);
  x_l(t_)=sum(ak.*exp(j*2*pi*k*t));
end
figure(1); plot(t_l,x_l,'b-',t_l,0.5+2/pi*cos(2*pi*t_l),'g-');
```

1. L'approximation choisie est
$$\widehat{Y}(f) = a_0\delta(f) + a_1\delta(f-1) + a_{-1}\delta(f+1) = 0.5\delta(f) + \frac{1}{\pi}\delta(f-1) + \frac{1}{\pi}\delta(f+1) \tag{7}$$
La transformée de Fourier inverse conduit à
$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}e^{j2\pi t} + \frac{1}{\pi}e^{-j2\pi t} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi t) \tag{8}$$

2. Les contraintes conduisent à
$$\begin{cases} z(0) = a + b + c = x(0) = 1 \\ z(0.5) = a - b - c = x(0.5) = 0 \end{cases} \tag{9}$$
Une solution possible est $a = b + c = 0.5$ et $b = c = 0.25$. Ce qui donne $z(t) = 0.5 + 0.5\cos(2\pi t)$

3. Les deux approximations sont toutes deux périodiques de périodes 1. La première a sa transformée de Fourier qui coïncide avec $\widehat{X}(f)$ sur $[-1.5, 1.5]$Hertz. La deuxième lorsqu'elle est échantillonnée à $f_e = 2$, elle conduit à un repliement spectral du comportement fréquentiel au delà de 1Hertz. On a aussi un problème en 1Hertz. La composante continu est la seule bien préservée.

Exercice 3. *() On cherche à approximer $A = \int_0^1 x(\tau)d\tau$ au moyen de la technique des trapèzes en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en une succession d'intervalles sans chevauchement $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ pour $n \in \{0 \dots N-1\}$.*
$$A \approx A_N = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(\tau_n) + x(\tau_{n+1})}{\tau_{n+1} - \tau_n} \tag{10}$$
Montrez qu'en utilisant la transformée bilinéaire sur l'équation $\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$, on trouve quasiment la même expression.

Solution :

La fonction de transfert associée à $\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$ est $H(p) = \frac{1}{p}$. La transformée bilinéaire conduit à
$$H^{\#}(z) = \frac{T_e}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{11}$$
La relation entrée-sortie est
$$y_n - y_{n-1} = \frac{T_e}{2}(x_n + x_{n-1}) \tag{12}$$
Je choisis $T_e = \frac{1}{N}$.
$$y_N = y_0 + \sum_{n=1}^{N} y_n - y_{n-1} = \frac{T_e}{2}x_0 + \frac{T_e}{2}\sum_{n=1}^{N} x_n + x_{n-1} = \frac{1}{2N}x_0 + \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n + x_{n+1} \tag{13}$$

Exercice 4. *() Dans une application très particulière, on a des sons formés de trois notes de musiques, une plus grave, la deuxième moins grave et la troisième plus aigüe. Les notes sont joués avec une intensité similaire. Les fréquences sont très différentes avec une différence d'au moins* 100*Hertz. Ces fréquences sont entre 200Hertz et 1000Hertz. Les sons ont une durée identiques d'une minute, ils sont échantillonnés à 4 kiloHertz. Ils sont composés successivement des trois notes avec une durée identique pour chaque note. Le premier type de sons forment la séquence* grave, moyen, aigüe*, la deuxième la séquence* moyen, aigüe, grave *et le troisième la séquence* aigüe, grave, moyen*. En s'inspirant des techniques proposées en cours, expliquez en détail et avec des pseudo-programmes, ce que vous proposez pour en faire la classification. Quelle est la durée des trames choisies ? Quelle est la normalisation choisie ? Quels sont le/les descripteurs choisis ? Comment proposez-vous de calculer la distance ? Quel type de classifieurs utilisez-vous ?*

Solution :
On constitue un certain nombre de sons, on range chaque type de sons dans un répertoire. La prédiction du type associé à un son se fait de la façon suivante.

1. On découpe le son en trames de 50ms sans chevauchement. La longueur n'a pas être plus grande pour avoir une meilleur résolution fréquentielle (de l'ordre de l'inverse de la durée des trames).
2. Il n'est pas utile ici de retirer le début et la fin du son, ni de normaliser le son.
3. On utilise le zero crossing rate comme descripteur qui nous donne, ici, une estimation de la fréquence de la sinusoïde sur la trame. Le descripteur vaut 1 pour cette trame si la fréquence obtenue est égale, plus basse ou légèrement supérieure que les autres fréquences obtenus avec les autres trames. Il vaut 3 pour cette trame si la fréquence obtenue est égale, légèrement plus basse ou supérieure que les autres fréquences obtenus avec les autres trames. Il vaut 2 s'il ne vaut ni 1 ni 3.
4. On utilise une distance adaptée aux signaux de même durée en utilisant une norme euclidienne sur les valeurs des trois descripteurs.
5. On utilise la technique du plus proche voisin.

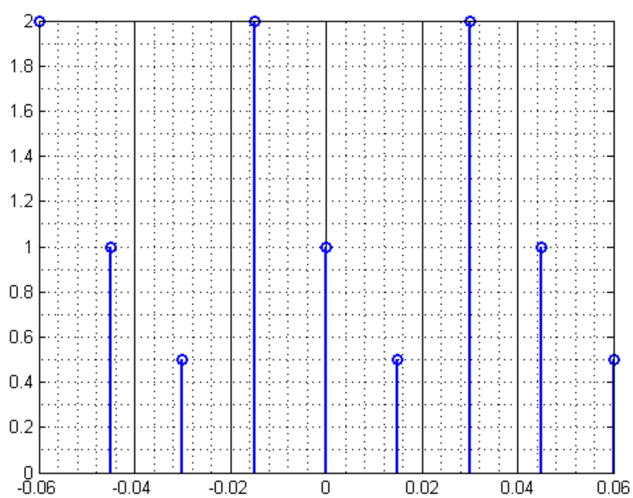

Figure 1: Signal périodique, x_n. Exercice 5

Exercice 5. *On considère un signal x_n temps discret périodique représenté sur la figure 1.*

1. *Quelle est la fréquence d'échantillonnage et quelle est la période du signal ?*
2. *Déterminez numériquement les valeurs du signal.*
3. *Calculez l'autocorrélation en $t = 0$, notée $\gamma_x[0]$. Trouvez les entiers a, b, c, d tels que*

$$\gamma_x[0] = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{12}$$

4. *Calculez l'autocorrélation pour un retard d'un pas de temps notée $\gamma_x[1]$. Trouvez les entiers a, b, c, d tels que*

$$\gamma_x[1] = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{12}$$

Solution : simulation sous Matlab

```
Te=1.5e-2;
motif=[1 0.5 2 ];
tn=Te*(-1-length(motif):length(motif)+1);
xn=[motif(end) motif motif motif(1:2)];
figure(1); stem(tn,xn,'Linewidth',2); grid minor;
```

1. Pour avoir plus de précision sur la mesure de la période d'échantillonnage, il est souhaitable de mesure la durée entre des instants distants et de diviser par le nombre d'espacements. $T_e = 0.03/2 = 0.015$s et donc $f_e = 200/3$Hz. La période est de $3T_e = 0.045$s, c'est-à-dire qu'il faut utiliser $N = 3$.

2. Ce sont les valeurs du signal qui sont demandées, non les instants correspondants. $x_0 = 1$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 2$. L'énoncé indique qu'il s'agit d'un signal périodique, aussi les valeurs à indiquer sont celles associées à une période.

3. L'énoncé précise que le signal est périodique, il convient d'utiliser la formule de l'autocorrélation correspondante.

$$\gamma_x[0] = P_x = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4} + 4) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$$

4.

$$\gamma_x[1] = \frac{1}{3}(x_0x_2 + x_1x_0 + x_2x_1) = \frac{1}{3}(2 + \frac{1}{2} + 1) = 1 + \frac{2}{12}$$