Examen de traitement numérique du signal

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Ni les calculatrices, ni les téléphones portables ne sont autorisées.

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

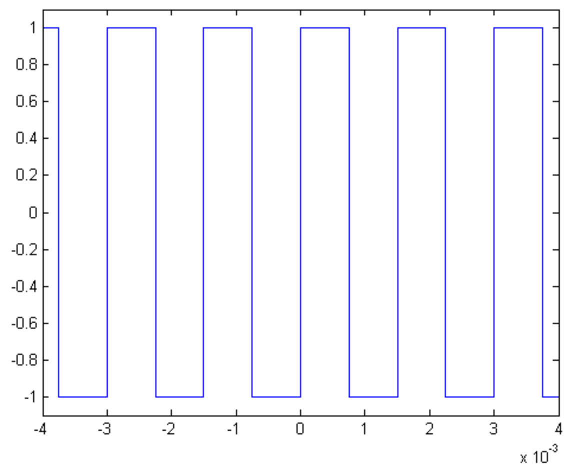

Figure 1: Signal pour l'exercice 1

Exercice 1 *() On considère un signal en entrée $x(t)$ défini par la figure 1, il s'agit d'un signal pour tous les instants. On considère un filtre analogique idéal défini par sa réponse fréquentielle*

$$\widehat{H}(f) = \mathbf{1}_{[-f_c,f_c]}(f)$$

avec $f_c = 1$kHz. On cherche à calculer la sortie obtenue avec le filtre idéal noté $y(t)$.

1. *Le signal de sortie est-il temps continu/temps discret ? Est-il périodique ou non-périodique ? Que vaut ce signal ?*
2. *Quelle est la transformée de Fourier bien adaptée pour calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$?*
3. *Calculez la transformée de Fourier de $x(t)$ et montrez qu'elle vaut $\hat{X}_k = \frac{1-(-1)^k}{j\pi k}$ et $\hat{X}_0 = 0$.*
4. *Calculez la transformée de Fourier de $y(t)$ et en déduire $y(t)$.*
5. *Représentez la transformée de Fourier sur un spectre.*
6. *Sachant que la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ vaut $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$, comment aurions-nous pu trouver la transformée de Fourier de $x(t)$?*
7. *Au moyen d'une représentation graphique, donnez une construction graphique permettant de trouver la transformée de Fourier de $x(t)$.*

Solution :

1. temps continu et périodique de période 1.5

$$x(t) = \mathbf{1}_{[0,\frac{3}{4}\times 10^{-3}]}(t) - \mathbf{1}_{[\frac{3}{4}\times 10^{-3},\frac{3}{2}\times 10^{-3}]}(t)$$

pour $t \in [0, \frac{3}{2}\times 10^{-3}]$.

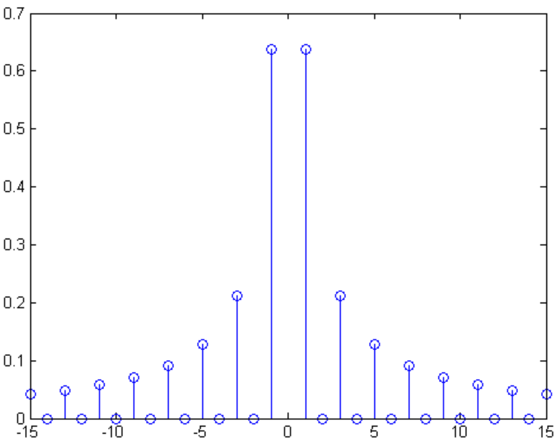

Figure 2: Module de la transformée de Fourier. Exercice 1

2. série de Fourier à temps continu
3. Je note $T = \frac{3}{2}\times 10^{-3}$.

$$\widehat{X}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{kt}{T}}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}\,dt - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} e^{-2j\pi\frac{kt}{T}}\,dt$$

$$\widehat{X}_k = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{-j\pi k}-1}{-j2\pi k/T} - \frac{1-e^{j\pi k}}{-j2\pi k/T}\right) = \frac{2-2\cos(\pi k)}{j2\pi k} = \frac{1-(-1)^k}{j\pi k}$$

4. Quand k est paire, $\widehat{X}_k$ est nul.

```
k=-15:15;
Xk=abs((1-(-1).^k)./(j*pi*k)); figure(1); stem(k,Xk);
```

5. Comme $\frac{1}{T} < f_c < \frac{2}{T}$, $\widehat{Y}_k$ n'a que deux pics, celui associé à $k=1$ et à $k=-1$.

$$\widehat{Y}_1 = \frac{2}{j\pi} \text{ et } \widehat{Y}_{-1} = -\frac{2}{j\pi} \text{ et } \forall k \notin \{-1,1\},\ \widehat{Y}_k = 0$$

La série de Fourier montre alors que

$$y(t) = \frac{2}{j\pi}e^{j2\pi\frac{t}{T}} - \frac{2}{j\pi}e^{-j2\pi\frac{t}{T}} = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

6. Je pose

$$z(t) = \mathbf{1}_{[0,\frac{T}{2}]}(t) - \mathbf{1}_{[\frac{T}{2},T]}(t)$$

Signal retardé

$$\mathbb{TF}\left(\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right) = e^{-j\pi f}\,\mathbb{TF}\left(\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\right) = e^{-j\pi f}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

Signal dilaté

$$\mathbb{TF}\left(\mathbf{1}_{[0,T/2]}(t)\right) = \frac{T}{2}\mathbb{TF}\left(\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right)(fT/2) = e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\frac{\sin(\pi f\frac{T}{2})}{\pi f}$$

Signal retardé et linéarité

$$\widehat{Z}(f) = \mathbb{TF}\left(z(t)\right) = e^{-j\pi f \frac{T}{2}} \frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f} \left(1 - e^{-j\pi f T}\right) \text{ et } \widehat{Z}(0) = 0$$

En comparant la transformée de Fourier et le calcul des coefficients de la série de Fourier, on remarque

$$\widehat{X}_k = \frac{1}{T} \widehat{Z}\left(\frac{k}{T}\right)$$

Après remplacement,

$$\widehat{X}_k = e^{-\frac{j\pi k}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k} \left(1 - e^{-j\pi k}\right) \text{ et } \widehat{X}_0 = 0$$

Quand k est impaire, cette expression vaut 0. Quand k est paire, on constate que cette expression coïncide avec l'expression calculée précédemment.

7. Une construction géométrique permettant de dessiner $\widehat{X}_k$ consiste à représenter d'abord $\frac{1}{T}\widehat{Z}(f)$ puis à noter les points de cette courbe associée à $f = \frac{k}{T}$.