INTÉGRATION

I. Primitive d'une fonction continue

1) Primitive d'une fonction

Exemple :
On considère les fonctions suivantes :
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x + 3$ $\quad$ $x \longmapsto x^2 + 3x - 1$
On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence :
« F a pour dérivée f » et « f a pour primitive F ».

Exemple :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$ pour $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

3) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstrations :
- $(F+G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

4) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw
Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw
Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ
Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$

c) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^2 e^{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

c) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$
avec $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$
Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$
Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$

Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

e) $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} 3x^2 e^{x^3}$ du type $u'e^u$ avec $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$
Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u.
Soit : $F(x) = \frac{1}{3} e^{x^3}$

f) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1) = \frac{1}{5} \times 5\cos(5x) - 3\sin(3x-1)$
Donc $F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + \cos(3x-1)$

<u>Propriété :</u> Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

<u>Démonstration :</u>
Vidéo https://youtu.be/oloWk2F4bl8
Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

<u>Propriété :</u> f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

<u>Démonstration :</u>
F est une primitive de f.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

<u>Exemple :</u>
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$.
Donc, toute fonction de la forme $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f.

<u>Propriété :</u> Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Démontrée dans le chapitre Intégration -

<u>Remarque :</u> Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Vidéo https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

1) La fonction F est une primitive de f, si $F' = f$.

$F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$.

2) Toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x) = F(x) + C$ où C est un nombre réel.

On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$

Donc : $F(1) + C = 0$

Soit : $\frac{e^{2\times 1}}{1} + C = 0$

$C = -e^2$

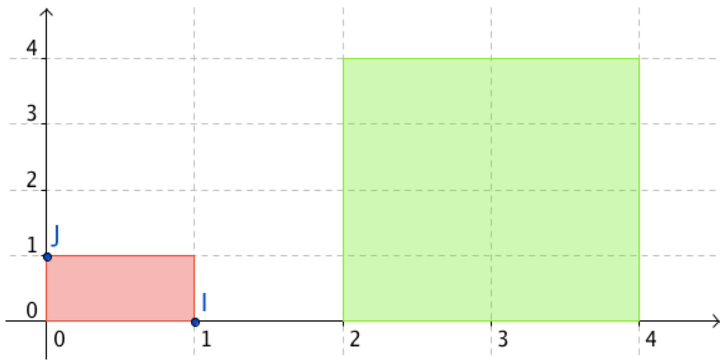
La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$

En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).
Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

II. Intégrale et aire

1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

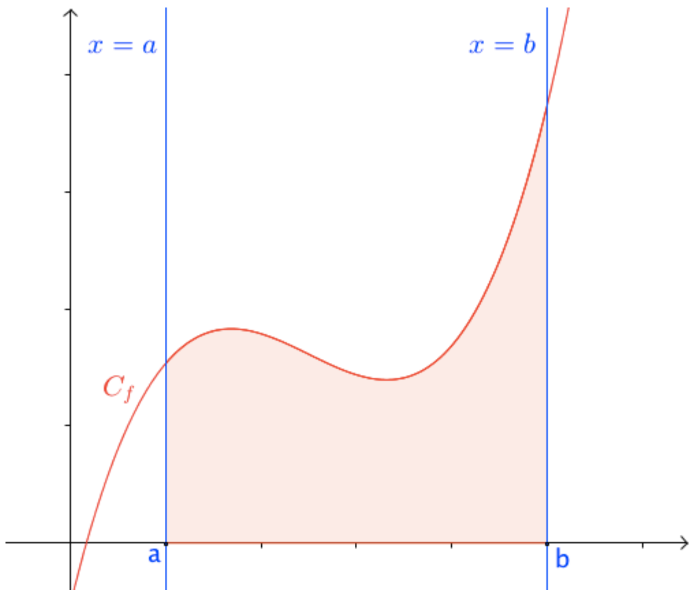
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a\,;b]$ se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

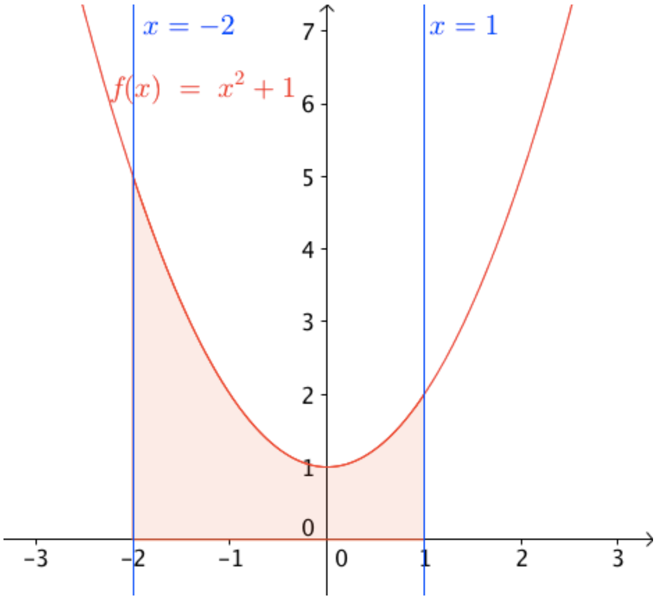
Et on lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme <u>s</u>omme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

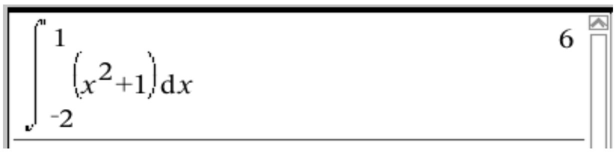
<u>Remarques :</u>
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.
"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

<u>Exemple :</u>
L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note $\int_{-2}^{1} x^2 + 1\,dx$.



Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'aire cherchée.



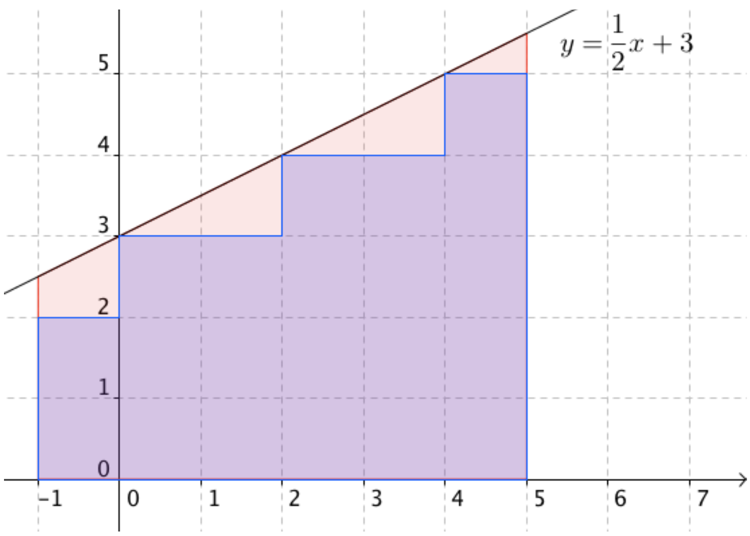
Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

Vidéo https://youtu.be/jkxNKkmEXZA

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$.

a)

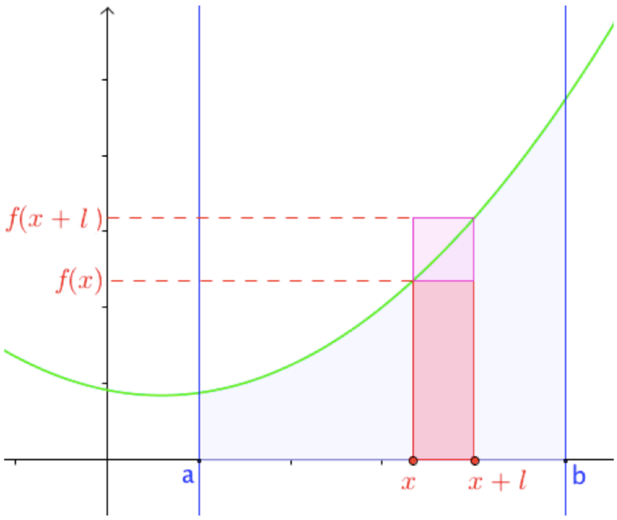


b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.
Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 21\,u.a. + 3\,u.a. = 24\,u.a.$

4) <u>Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive</u>

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x\,;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire l x $f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire l x $f(x+l)$.



Sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel

Définir fonction rectangle(a, b, n)
 	
L ← (b-a)/n
x ← a
m ← 0
p ← 0
 	
Pour i allant de 0 à n-1
    m ← m+Lxf(*x*)
    x ← *x*+L
    p ← p+Lxf(*x*)
FinPour
 	
Afficher m et p

```python
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

<u>Exemple :</u>
Avec Python, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.318350000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On vérifie avec un logiciel de calcul formel :

$$\int_1^2 x^2 \, dx \qquad \frac{7}{3}$$

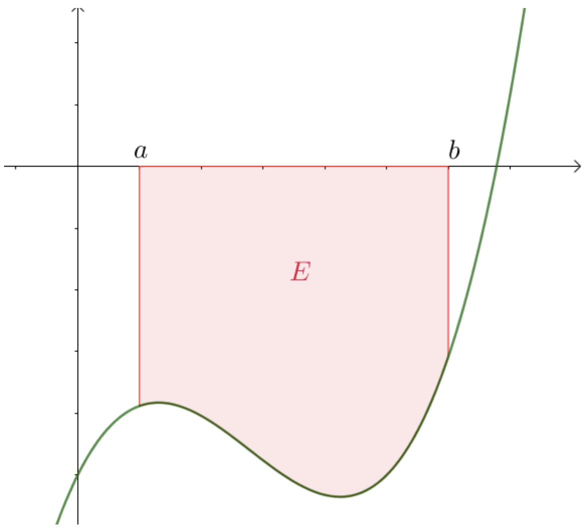
$$\int_1^2 x^2 \, dx \qquad 2.33333$$

Calculer une intégrale avec la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/0Y3VT73yvVY
Vidéo Casio https://youtu.be/hHxmizmbY_k
Vidéo HP https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo

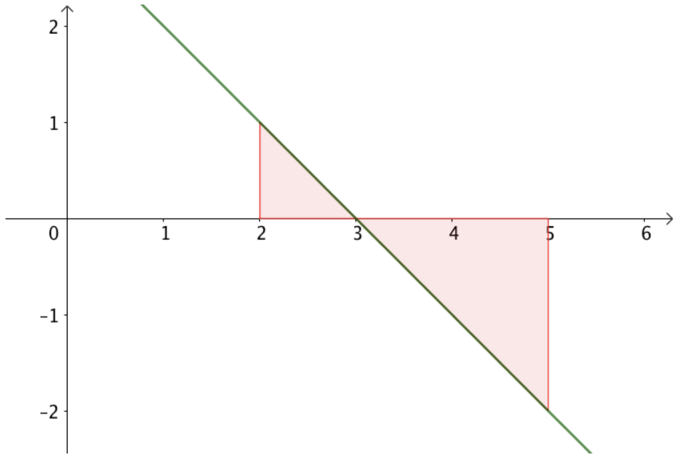
5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ le nombre $I = \int_a^b f(x)\,dx$ défini par :
- si f est positive sur $[a\,;b]$: $I = Aire(E)$,
- si f est négative sur $[a\,;b]$: $I = -Aire(E)$,
où E est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple :

$$\int_2^5 3 - x\,dx = \frac{1\times 1}{2} - \frac{2\times 2}{2} = -1{,}5$$



6) Propriétés

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des réels de I.

$a)$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$b)$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

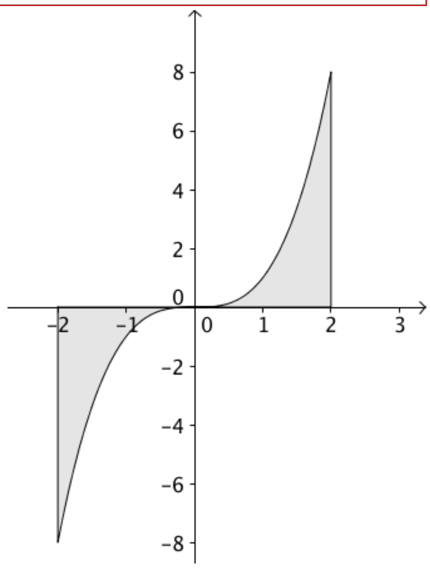
$c)$ Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque :
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple :

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_0^2 x^3\,dx = 0$$

La courbe représentative de la fonction cube est en effet symétrique par rapport à l'origine du repère, donc :

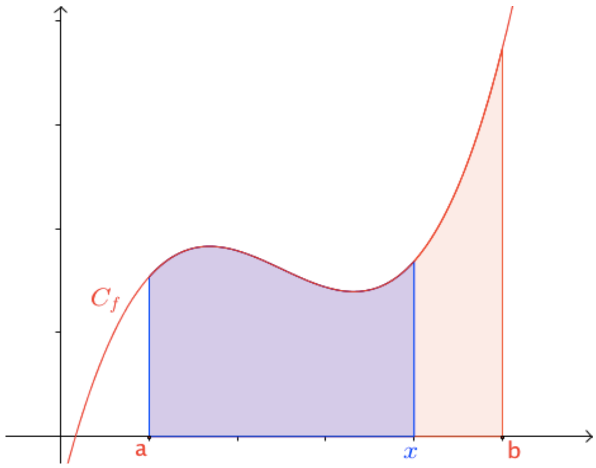
$$\int_{-2}^{0} x^3\,dx = -\int_0^2 x^3\,dx$$



III. Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.



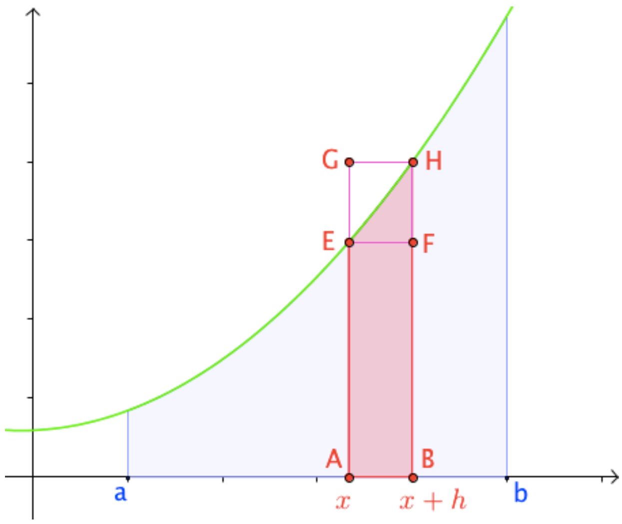
Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :

- 1er cas : $h > 0$

On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a ; b]$.

On veut démontrer que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx$$
$$= \int_a^{x+h} f(x)\,dx + \int_x^a f(x)\,dx$$
$$= \int_x^{x+h} f(x)\,dx$$



On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire(ABFE) = h \times f(x)$ et
$Aire(ABHG) = h \times f(x+h)$.
Comme f est croissante sur $[a ; b]$, on a :
$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$
Puisque $h > 0$, on a :
$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$
Comme f est continue sur $[a ; b]$, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.
Et donc : $F'(x) = f(x)$.
F est donc une primitive de f.
Par ailleurs, F s'annule en a, car $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

- 2e cas : $h < 0$

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

Vidéo https://youtu.be/6DHXw5TRzN4

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.
a) Étudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.

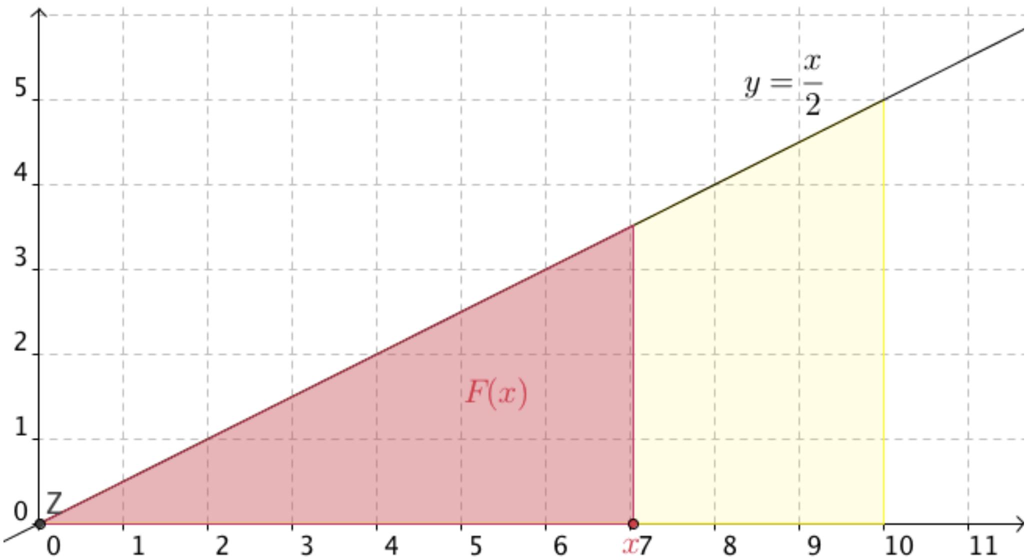
a) $t \longmapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et $F'(x) = \frac{x}{2} > 0$.

Donc F est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

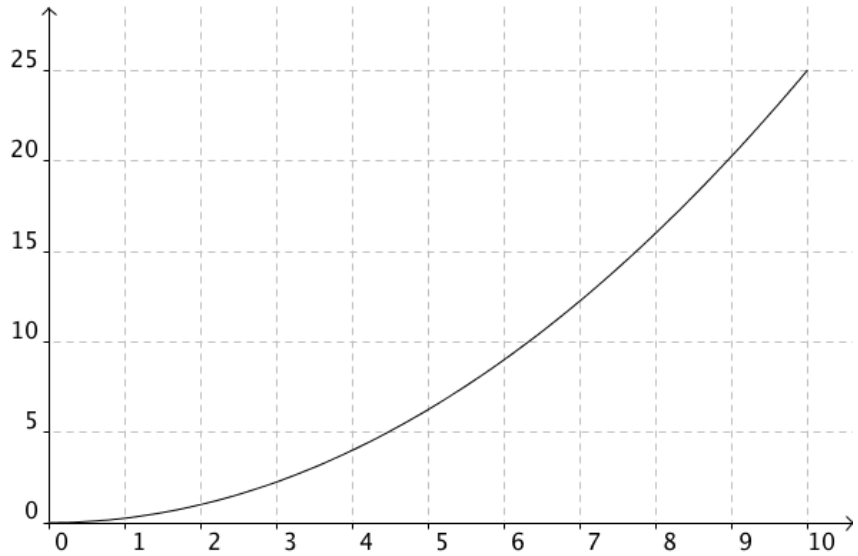
x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	25

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.
Ainsi $F(10) = \frac{10\times5}{2} = 25\ u.a.$



b) Pour tout x de [0 ; 10], on a $F(x) = \frac{x\times\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}\ u.a.$

On a ainsi la représentation graphique de F :



2) Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration :
La fonction G définie sur $[a\,;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a\,;b]$ d'après le premier théorème du paragraphe II.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\,;b]$, on a : $G(x) = F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
De plus, $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc :
$k = -F(a)$.
Or $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Vidéo https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw
Vidéo https://youtu.be/8ci1RrNH1L0
Vidéo https://youtu.be/uVMRZSmYcQE

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx \qquad C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$$

$A=\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$

On note : $f(x)=\frac{3}{x^2}=3\times\frac{1}{x^2}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x)=3\times\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{x}$

Donc :

$A=\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx=\left[-\frac{3}{x}\right]_1^4=F(4)-F(1)=-\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{1}\right)=\frac{9}{4}$

$B=\int_2^5 3x^2+4x-5\,dx$

$=\left[x^3+2x^2-5x\right]_2^5$

$=5^3+2\times5^2-5\times5-(2^3+2\times2^2-5\times2)=144$

$C=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$

On note : $f(x)=e^{-2x}=\frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x)=\frac{1}{-2}e^{-2x}$

Donc :

$C=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx=\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1=F(1)-F(-1)$

$=\frac{1}{-2}e^{-2\times1}-\frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$

$=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}$

$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

3) Propriété de linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F+G$ est une primitive de $f+g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

Vidéo https://youtu.be/B9n_AArwjKw

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$
a) Calculer $A + B$ et $A - B$.
b) En déduire A et B.

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A + B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx + \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x + \sin^2 x \, dx$$
$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dx$$
$$= [x]_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi$$

$$A - B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx - \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2}\sin(2 \times 0) = 0$$

b) On a ainsi :
$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases}$ soit : $A = B = \pi$

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.
a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.
b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.
Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \geq 0$.
Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

Vidéo https://youtu.be/VK0PvzWBIso

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$$

$$\int_0^1 0\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

D'où : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

IV. Aire délimitée par deux courbes

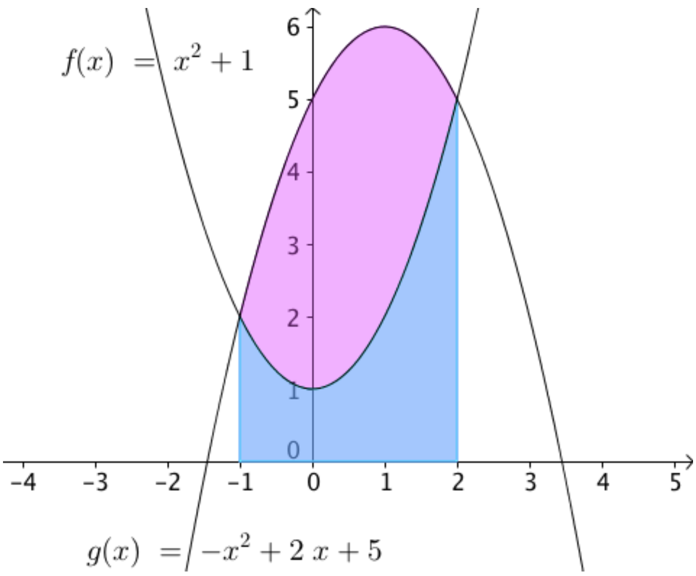
Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

Vidéo https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1\,;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f.
Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^2 g(x)\,dx - \int_{-1}^2 f(x)\,dx$$



$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^2 g(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2 + 5\times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5\times(-1)\right) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_f &= \int_{-1}^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 + 1\ \,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3}\times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right) \end{aligned}$$

$= 6$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9\ u.a.$

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

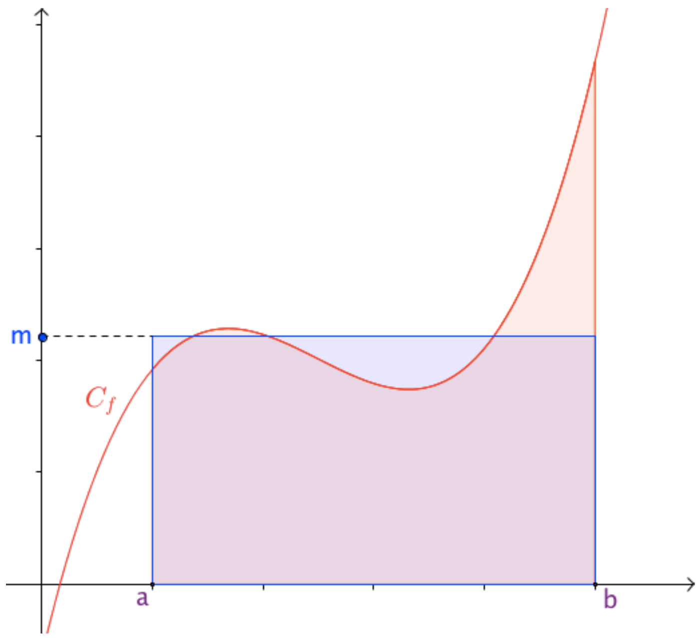
$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx - \int_{-1}^{2} x^2 + 1\ dx$$
$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\ dx = \cdots = 9$$

V. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu), entre a et b.



Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [1 ; 10].

$$m = \frac{1}{10-1}\int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5\,dx$$
$$= \frac{1}{9}\left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^{10}$$
$$= \frac{1}{9}\left((10^3 - 2\times 10^2 + 5\times 10) - (1^3 - 2\times 1^2 + 5\times 1)\right) = \frac{1}{9}(850-4) = \frac{846}{9} = 94$$

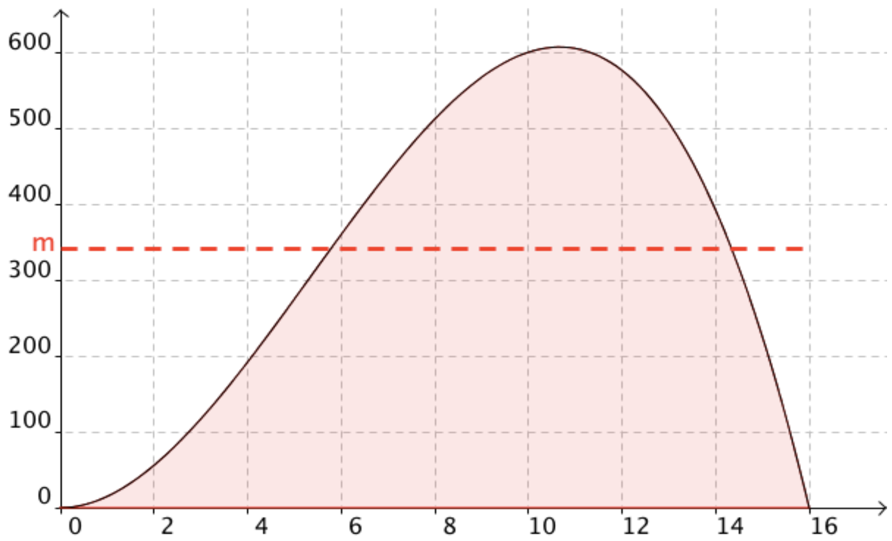
Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/oVFHojz5y50

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right)$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



VI. Intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Démonstration :
uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$
Les fonctions uv', $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a\,;b]$, donc :

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x)\,dx \\ &= \int_a^b (u'v+uv')(x)\,dx \\ &= \int_a^b (u'v)(x)\,dx + \int_a^b (uv')(x)\,dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Vidéo https://youtu.be/uNIpYeaNfsg
Vidéo https://youtu.be/vNQeSEb2mj8
Vidéo https://youtu.be/xbb3vnzF3EA

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx \qquad C = \int_1^{e^2} \ln x\,dx$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{v}{x}\ \underset{u'}{\sin x}\,dx$$

➽ *Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser de facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer.* Il faudrait donc dériver x.

On pose : $v(x) = x \quad \rightarrow \quad v'(x) = 1$
$u'(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad u(x) = -\cos x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\,v(x)dx &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx \\ &= [-\cos x \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \times 1\,dx\end{aligned}$$

$$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$
$$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0 \times \cos 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\cos x}_{u'} \, dx$$

On pose : $v(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad v'(x) = 2x$
$u'(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad u(x) = \sin x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\, v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\, dx$$
$$= [\sin x \times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times 2x \, dx$$
$$= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

Or, dans le terme de droite, on reconnait l'intégrale A de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**.

On a donc :

$$B = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2} - 0^2 \sin 0 - 2 \times 1$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$C = \int_1^{e^2} \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} \, dx$$

On pose : $v(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x}$
$u'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad u(x) = x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$C = \int_1^{e^2} u'(x)\, v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u(x)v'(x)\, dx$$
$$= [x\ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\, \frac{1}{x} dx$$
$$= e^2 \ln e^2 - 1\ln 1 - \int_1^{e^2} 1 \, dx$$

$$= e^2 \times 2\ln e - [x]_1^{e^2}$$
$$= e^2 \times 2 - e^2 + 1$$
$$= e^2 + 1$$

VII. Intégrales et suites

Méthode : Étudier une suite d'intégrales

Vidéo https://youtu.be/8I0jA4ICIKM

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n, par :

$$I_n = \int_1^e x\,(\ln x)^n\,dx$$

1) Calculer I_0.
2) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
3) A l'aide d'un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite (I_n).

1) Pour $n = 0$, on a :
$$I_0 = \int_1^e x\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{e^2-1}{2}$$

2) L'objectif est d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
$$I_{n+1} = \int_1^e \underbrace{x}_{u'}\ \underbrace{(\ln x)^{n+1}}_{v}\,dx$$

On pose : $v(x) = (\ln x)^{n+1} \quad \to \quad v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$
$u'(x) = x \quad \to \quad u(x) = \frac{1}{2}x^2$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :
$$I_{n+1} = \int_1^e u'(x)\,v(x)dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2(n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n\,dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2(\ln e)^{n+1} - \frac{1}{2} \times 1^2(\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

Donc :
$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

3)
```python
from math import*

def integ(n):
    I=(e**2-1)/2
    for k in range(1,n+1):
        I=e**2/2-k*I/2
    return I
```

```
>>> integ(5)
0.951367987633668
>>> integ(10)
0.5748317309902866
>>> integ(30)
39275840.04973485
>>> integ(100)
1.170494462774085e+112
```

On conjecture que : $\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$