Correction du QCM
Séance 9

Question 1

V A. En général, pour un filtre

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[-T/2, T/2]}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[-T/2, T/2]}(\tau-t)\, x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[t-T/2, T/2]}(\tau-t)\, x(\tau)\, d\tau$$

$$y(0) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi\nu_0\tau}\, d\tau$$

F B. $x(t)$ est périodique de période $\frac{1}{\nu_0}$ / $x(t+\frac{1}{\nu_0}) = e^{i2\pi\nu_0(\frac{1}{\nu_0}+t)} = x(t)$

Donc $y(t+\frac{1}{\nu_0}) = y(t)$

Mais $T \neq \frac{1}{\nu_0}$

V C. $x(t)$ n'a qu'un seul coefficient de série de Fourier non-nul

$X_1 = 1$. car $x(t) = X_1 e^{i2\pi\nu_0 t}$

$$Y_1 = X_1\, H\left(\frac{1}{(1/\nu_0)}\right) = X_1\, H(\nu_0) = H(\nu_0) = \frac{\sin \pi\nu_0 T}{\pi\nu_0}$$

Donc $y(t) = Y_1 e^{i2\pi\nu_0 t} = \frac{\sin \pi\nu_0 T}{\pi\nu_0} e^{i2\pi\nu_0 t}$

$Y_k = 0$ si $k \neq 1$

F. D. $y(t) = \dfrac{\sin \pi \nu_0 T}{\pi \nu_0} x(t)$

ici $\left| \dfrac{\sin \pi \nu_0 T}{\pi \nu_0} \right| \leq \dfrac{1}{\pi \nu_0} \simeq 3 \times 10^{-4}$

donc $y(t) \neq x(t)$.

Question 2

F A. $x(t)$ est impaire et non pair car c'est le cas pour $t \in [-1, 1]$ et par périodicité c'est encore vraie $x(t) = x(t - kT) = -x(kT - t)$
$= -x(-t)$

$x(t) + x(-t) = 0$

F. B. Quand $t \in [-1, 0]$, $x(t)\ x(t-1) = -1$

Quand $t \in [0, 1]$, $x(t) - x(t-1) = 1$

V C. $x(t)$ est périodique de période 2

$x(t) = x(t-2)$

Donc $y(t) = y(t-2)$

F. D. Si $h(t)$ était paire on aurait $y(t)$ impaire. Mais ici non

Une autre façon de raisonner

$x(t)$ impaire $\Rightarrow \underline{X_k} = -X_k$

$\underline{Y}_{-k} = H\left(\frac{-k}{2}\right) X_{-k} = \dfrac{1}{-2i\frac{\pi k}{2} + 1} (-X_k) = \dfrac{X_k}{i\pi k - 1}$

$Y_k = H\left(\frac{k}{2}\right) X_k = \dfrac{1}{i\pi k + 1} X_k$

on voit $Y_{-k} \neq -Y_k$.

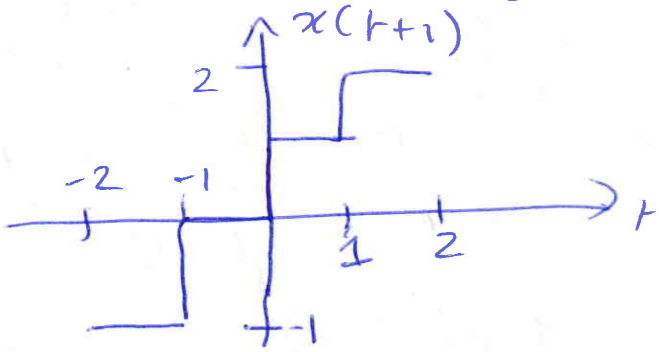
Si $h(t)$ était impaire alors $y(t)$ serait paire.

Question 3

F A. $x(t)$ n'est pas pair car $x(0^+) = 0$ et $x(0^-) = -1$

En fait $x(t+\frac{1}{2})$ est impair.

V B.



On voit que $x(t+1) - x(t) = 1$.

V C. $y(t) = h(t) * x(t)$

$$= \delta(t) * x(t) - \delta(t-1) * x(t)$$

$$= x(t) - x(t-1)$$

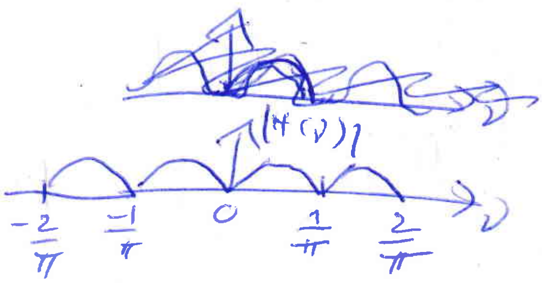
$$= x(t) - (-1 - x(t-1+1))$$

$$= x(t) + 1 - x(t) = 1$$

F D. $H(\nu) = TF[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t) - \delta(t-1)) e^{-2i\pi\nu t} dt$

$H(\nu) = 1 - e^{-2i\pi\nu} = e^{-i\pi\nu} 2i \sin \pi\nu$

$|H(\nu)| = 2|\sin \pi\nu|$ ce n'est pas un passe-bas.



Question 4

V A. $y(t) = h(t) * x(t)$

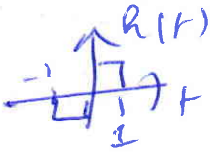
- $h(t)$ est impair $h(t) = 1\!\!1_{[0,1]}(-t) - 1\!\!1_{[-1,0]}(-t)$

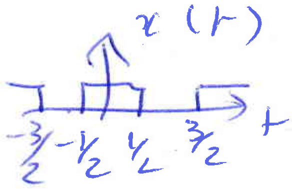
$$= 1\!\!1_{[-1,0]}(t) - 1\!\!1_{[0,1]}(t)$$
$$= -h(t)$$

- $x(t)$ est pair
Pour $t \in [0,2]$,

$$x(-t) = x(2-t) = 1\!\!1_{[0,\frac{1}{2}]}(2-t) + 1\!\!1_{[\frac{3}{2},2]}(2-t)$$
$$= 1\!\!1_{[-\frac{1}{2},0]}(t-2) + 1\!\!1_{[-2,-\frac{3}{2}]}(t-2)$$
$$= 1\!\!1_{[\frac{3}{2},2]}(t) + 1\!\!1_{[0,\frac{1}{2}]}(t) = x(t)$$

Donc $y(t)$ est impair
C'est plus facile de raisonner graphiquement.





F B. $X_0 = \frac{1}{2}$

Mais $H(0) = 0$ car le filtre est impair

$$H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 0$$

Donc $Y_0 = 0$.

F. C. $P_X = \frac{1}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$

$$P_y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|H\left(\frac{k}{2}\right)\right| |X_k|^2$$

Mais $H\left(\frac{k}{2}\right) \neq 1$. Donc $P_y < P_x$.

$$H(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\left(e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}\right) = -2i\frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi\nu}$$

D. $x(t)$ est à variation borné donc $y(t)$ est continu.

Question 5

✓ A. $x(t)$ périodique de période 3

$$x(t) = x(t-3)$$

$$y(t-3) = [h(t) * x(t)](t-3)$$
$$= [h(t) * x(t-3)](t)$$
$$= [h(t) * x(t)](t)$$
$$= y(t).$$

✓ B. $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

✓ C. $y_T(t) = h(t) * x_T(t)$

$$= 1\!\!1_{[0,2]}(t) * 1\!\!1_{[0,2]}(t)$$

$$y_T(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[0,2]}(1-t)\, 1\!\!1_{[0,2]}(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[-2,0]}(t-1)\, 1\!\!1_{[0,2]}(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[-1,1]}(t)\, 1\!\!1_{[0,2]}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 dt = 1.$$

S9, Ex 6

F D. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-3k)$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t) * x_T(t-3k)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_T(t-3k)$$

On considère $t \in [0,3]$

$y_T(t)$ est non-nul sur $t \in [0,4]$

$y_T(t-3)$ est non-nul sur $t \in [3,7]$
et est donc nul pour $t \in [0,3]$.

Le seul autre terme non-nul est $y_T(t+3)$.

$$y(t) = y_T(t) + y_T(t+3)$$