Séance 9

exercices

exercice 1

On considère un signal $x_\alpha(t)$ défini par

- $x_\alpha(t)$ est périodique de période 1
- Pour $t \in [0, \alpha]$, $x_\alpha(t) = 1$
- Pour $t \in]\alpha, 1]$, $x_\alpha(t) = 0$

avec $\alpha \in [0, 1[$

On considère aussi $x_{\alpha,1}(t) = \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(t)$ non-périodique.

1. Montrez que pour $t \in [0, 1[$, $x_\alpha(t) = x_{\alpha,1}(t)$.

2. On note $X(\nu)$ la transformée de Fourier de $x_\alpha(t)$ et $X_{\alpha,k}$ ses coefficients de Fourier. Montrez que $X_{\alpha,0} = \alpha$

3. On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t - \frac{1}{2})$.
Calculez la réponse fréquentielle, et montrez que $H(\nu) = e^{-i\pi\nu}$

4. On note $y_\alpha(t)$ la sortie de ce filtre, lorsque l'entrée est $x_\alpha(t)$.
Montrez que $y_\alpha(t)$ est périodique de période 1.

5. On note $Y_\alpha(\nu)$ la transformée de Fourier de $y_\alpha(t)$ et Y_k ses coefficients, montrez que

$$Y_{\alpha,k} = (-1)^k X_{\alpha,k}$$

6. Montrez alors que $Y_{\alpha,0} = \alpha$

7. Calculez la puissance de $x_\alpha(t)$.
et montrez $P_{x_\alpha} = \alpha$

8. Montrez que $P_{y_\alpha} = P_{x_\alpha}$

9. On note $y_{\alpha,1}(t)$ la sortie du filtre lorsque l'entrée est $x_{\alpha,1}(t)$.

Montrez que $y_{\alpha,1}(t) = \mathbb{1}_{[+1/2,\ \alpha+1/2]}(t)$

10. Montrez que pour $t \in [0, 1[$,

$$y_\alpha(t) = y_{\alpha,1}(t) + y_{\alpha,1}(t+1)$$

11. Tracez les graphes de $x_\alpha(t)$ et $y_\alpha(t)$ pour $t \in [-2, 2]$.
en séparant les cas $\alpha \leq 1/2$ et $\alpha > 1/2$.

12. Tracez les graphes de $x_\alpha(0)$ et $y_\alpha(\pm\frac{1}{2})$ pour $\alpha \in [0, 1[$

13. Tracez les graphes de $x_\alpha(\frac{1}{2})$ et $y_\alpha(0)$ pour $\alpha \in [0, 1[$

15. Vérifiez qu'on a bien

$$Y_{\alpha,0} = \alpha \quad \text{et} \quad P_{y_\alpha} = \alpha.$$

14. Montrez que

Si $\alpha \leq 1/2$, $y_\alpha(t) = \mathbb{1}_{[1/2,\ \alpha+1/2]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$

Si $\alpha \in]1/2, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbb{1}_{[0,\ \alpha-1/2]}(t) + \mathbb{1}_{[1/2,\ 1]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$.