Cours
Séance 9
Filtrage des signaux périodiques

① Périodisation et apériodisation

On peut transformer un signal périodique en un signal non périodique

$$\underbrace{x_T(t)}_{\text{nul sauf en } [0,T[} = \underbrace{x(t)}_{x(t) \text{ périodique de période } T} \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-kT)$$

On peut écrire cela avec le peigne de Dirac $x(t) = x_T(t) * Ш\left(\frac{t}{T}\right)$

où $Ш\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

En effet

$$x_T(t) * Ш\left(\frac{t}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-\tau)\, \delta(\tau - kT)\, d\tau$$

$$\left(x_T(t) * Ш\left(\frac{t}{T}\right)\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-kT)$$

Ici $x_T(t) = 0$ si $t \notin [0,T]$

si $t \in [0,T]$, $x(t) = x_T(t)$.

② Filtrage d'un signal périodique - Point de vue temporel

- $x(t)$ à variations bornées $\Rightarrow y(t)$ continue
- $x(t)$ périodique

alors $y(t)$ périodique

- Si $x(t) + x(t-\frac{T}{2}) = a$

alors $y(t) + y(t-\frac{T}{2}) = a H(0)$

- $Y_0 = H(0) X_0$

où $H(0)$ est la TF en la Fréquence nulle.

$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$

X_0 et Y_0 sont les coefficients de la série de Fourier à $k=0$.

$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) dt$ $\quad Y_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t) dt$.

- Si $\int_0^T x(t) dt = 0$ alors $\int_0^T y(t) dt = 0$.

La méthodologie est de passer par $x_T(t) = x(t)\, u_{[0,T]}(t)$.

$y_T(t) = h(t) * x_T(t)$

Puis $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_T(t-kT)$

Attention : $y_T(t)$ n'est pas forcément nul en dehors de $[0,T]$. Donc il n'est pas vrai en général que $y(t) = y_T(t)$ pour $t \in [0,T]$.

③ Filtrage d'un signal périodique, point de vue fréquentiel.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) X_k \qquad X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2i\pi\frac{k}{T}t}\,dt$$

$$H(\nu) = TF[h(t)]$$

$$Y(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k\, \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

$$Y_k = H\left(\frac{k}{T}\right) X_k .$$

$x(t)$ périodique $\Rightarrow$ $y(t)$ périodique de même période.

④ Etude d'un exemple.

sans utiliser ce cours.

On considère $x(t)$ périodique de période T et $x(t) = 1$ si $t \in [0, \frac{T}{2}[$

$x(t) = 0$ si $t \in [\frac{T}{2}, T[$

On considère le filtre de réponse impulsionnelle

$$h(t) = e^{-t}\, 1\!\!1_{[0,+\infty[}(t)$$

Il correspond à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t)$$

en effet $H(\nu) = TF[h(t)] = \dfrac{1}{1+2i\pi\nu} = \dfrac{Y(\nu)}{X(\nu)}$

et $TF\left[\frac{d}{dt}y(t) + y(t)\right] = Y(\nu)(1+2i\pi\nu) = X(\nu) = TF[x(t)]$

La relation entrée-sortie de ce filtre s'écrit

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau \; \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t-\tau)$$

$$y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau)\, d\tau$$

Avec cette relation, on peut voir que <u>$y(t)$ est périodique</u>

$$y(t+T) = e^{-t-T} \int_{-\infty}^{t+T} e^{\tau} x(\tau)\, d\tau$$

on fait le changement de variable $\tau' = \tau - T$

$$\int_{-\infty}^{t+T} e^{\tau} x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau'+T} x(\tau'+T)\, d\tau'$$

$$= e^{T} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau'} x(\tau')\, d\tau'$$

donc $y(t+T) = y(t)$

On s'intéresse maintenant à $t \in [0, T[$, 5 Pour $\tau \in]-\infty, 0]$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,\frac{T}{2}]}(t - kT)$$

$$y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,\frac{T}{2}]}(\tau - kT)\, d\tau$$

$$y(t) = e^{-t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\, \mathbb{1}_{[0,\frac{T}{2}]}(\tau - kT)\, d\tau$$

$$y(t) = e^{-t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\, \mathbb{1}_{[kT, kT+\frac{T}{2}]}(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = e^{-t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{+kT}^{\min\left(kT+\frac{T}{2},\, t\right)} e^{\tau}\, d\tau$$

Pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$ il faut $k \leq 0$.

$$y(t) = e^{-t} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{kT}^{\frac{T}{2}+kT} e^{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{t} e^{\tau}\, d\tau \right)$$

$$y(t) = e^{-t} \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} \left[e^{\tau} \right]_{kT}^{kT+\frac{T}{2}} + (e^{t} - 1) \right]$$

$$y(t) = e^{-t} \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(e^{kT+\frac{T}{2}} - e^{kT} \right) + (e^{t} - 1) \right]$$

S9, C6

$$y(t) = e^{-t}\left[\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(e^{\frac{T}{2}}-1\right) e^{kT} + e^{t}-1\right]$$

- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{kT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-T} e^{-kT} = \frac{e^{-T}}{1-e^{-T}}$
- $\displaystyle\left(e^{\frac{T}{2}}-1\right)\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{kT} = \frac{\left(e^{\frac{T}{2}}-1\right)e^{-T}}{1-e^{-T}} = e^{-\frac{T}{2}}\frac{\left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)}{1-e^{-T}}$
- $1-e^{-T} = \left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{2}}\right)$

Donc $\displaystyle\frac{e^{-\frac{T}{2}}\left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)}{1-e^{-T}} = \frac{e^{-\frac{T}{2}}}{1+e^{-\frac{T}{2}}}$.

On pose $\displaystyle\gamma = \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{2}}}$.

D'où $y(t) = e^{-t}\left[\gamma e^{-\frac{T}{2}} + e^{t} - 1\right]$

$$= 1 - e^{-t}\left(1-\gamma e^{-\frac{T}{2}}\right)$$

et $\displaystyle 1-\gamma e^{-\frac{T}{2}} = 1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{2}}}e^{-\frac{T}{2}} = \frac{1+e^{-\frac{T}{2}}-e^{-\frac{T}{2}}}{1+e^{-\frac{T}{2}}} = \gamma$

D'où $y(t) = 1-e^{-t}\gamma$ pour $t\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$

Ensuite pour $t\in\left[\frac{T}{2}, T\right]$.

$$y(t) = e^{-t}\left[\sum_{k=-\infty}^{0}\int_{kT}^{kT+\frac{T}{2}} e^{\tau}\,d\tau\right]$$

$$y(t) = e^{-t}\left[\sum_{k=-\infty}^{0}\left(e^{kT+\frac{T}{2}} - e^{kT}\right)\right]$$

$$y(t) = e^{-t}\left[\sum_{k=-\infty}^{0} \left(e^{\frac{T}{2}}-1\right) e^{kT}\right]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{0} e^{kT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} = \frac{1}{1-e^{-T}}$$

$$\frac{e^{\frac{T}{2}}-1}{1-e^{-T}} = \frac{e^{\frac{T}{2}}\left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)}{1-e^{-T}} = \frac{e^{\frac{T}{2}}\left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{2}}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{T}{2}}}{1+e^{-\frac{T}{2}}} = e^{\frac{T}{2}}\gamma$$

D'où $y(t) = e^{-t} e^{\frac{T}{2}}\gamma = \gamma e^{\frac{T}{2}-t}$ pour $t \in [\frac{T}{2}, T]$

⑤ Etude de ce même exemple en utilisant le cours.

- $x(t)$ est périodique de période T donc $y(t)$ est périodique de même période.
- $X_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} dt = \frac{1}{2}$.

  $H(0) = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt = 1$

  Donc $Y_0 = \frac{1}{2}$.
- Vu la définition de $x(t)$, on remarque que $x(t) + x(t-\frac{T}{2}) = 1$.

  Donc $y(t) + y(t-\frac{T}{2}) = 1$

* On définit $x_T(t) = \mathbb{1}_{[0,\frac{T}{2}]}(t)$
et on note $y_T(t)$ la sortie du filtre associée. $h(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est la réponse impulsionnelle.

$$\frac{d}{dt} y_T(t) = h(t) * \frac{d}{dt} x_T(t) = h(t) * \left(\delta(t) - \delta(t-\frac{T}{2})\right)$$

$$\frac{d}{dt} y_T(t) = h(t) - h\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Donc $\frac{dy}{dt}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(h(t-kT) - h\left(t-kT-\frac{T}{2}\right)\right)$

Je considère $t \in [\frac{T}{2}, T]$,

$$\frac{d}{dt} y(t) = \sum_{k=} h(t-kT) - h(t-kT-\frac{T}{2})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t-kT)} - e^{-(t-kT-\frac{T}{2})}$$

$$= e^{-t}.A \quad \text{avec } A = (1-e^{\frac{T}{2}}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} = \frac{1-e^{\frac{T}{2}}}{1-e^{-T}}$$

$$A = \frac{-e^{\frac{T}{2}}(1-e^{-\frac{T}{2}})}{1-e^{-T}} = \frac{-e^{\frac{T}{2}}}{1+e^{-T/2}}$$

car $1-e^{-T} = (1-e^{-\frac{T}{2}})(1+e^{-\frac{T}{2}})$.

Donc $\frac{d}{dt} y(t) = -e^{-(t-\frac{T}{2})}\gamma$ où $\gamma = \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{2}}}$.

$y(t) = \alpha + e^{-(t-\frac{T}{2})}\gamma$ où α est une constante.

Pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$, $y(t) = 1 - y(t+\frac{T}{2}) = 1-\alpha-\gamma e^{-(t-\frac{T}{2})-\frac{T}{2}}$

$y(t) = 1-\alpha-\gamma e^{-t}$.

On sait que $y(t)$ est continu.

$$y(0^+) = 1-\alpha-\gamma e^{-0} = 1-\alpha-\gamma$$

$$y(T^-) = \alpha + \gamma e^{-\frac{T}{2}}$$

D'où $1-\alpha-\gamma = \alpha+\gamma e^{-\frac{T}{2}}$

Finalement $1-2\alpha = \gamma(1+e^{-\frac{T}{2}}) = 1$

Donc $\boxed{\alpha = 0}$.

On a donc trouvé $\begin{cases} y(t) = \gamma e^{-(t-\frac{T}{2})} & t\in[\frac{T}{2},T] \\ y(t) = 1-\gamma e^{-t} & t\in[0,\frac{T}{2}]. \end{cases}$

Le calcul trouvé est compatible avec la moyenne espérée.

$$Y_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} y(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} y(t)\,dt$$

$$Y_0 = \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} + \left[\gamma e^{-t}\right]_0^{\frac{T}{2}}\right] + \frac{1}{T}\gamma e^{\frac{T}{2}}\left[-e^{-t}\right]_{T/2}^{T}$$

$$Y_0 = \frac{1}{2} + \frac{\gamma(e^{-\frac{T}{2}}-1)}{T} + \frac{\gamma e^{\frac{T}{2}}}{T}\left(e^{-\frac{T}{2}}-e^{-T}\right)$$

$$Y_0 = \frac{1}{2}.$$

⑥ Comportement approximatif de $y(t)$.

Si on considère T très petit, alors le filtre se comporte comme un intégrateur, comme si l'équation différentielle est

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$$ avec $y(t)$ petit devant $\frac{d}{dt}y(t)$.

S9, C10

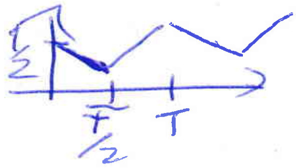
Pour T petit

$$\gamma = \frac{1}{1+e^{-\frac{T}{2}}} \simeq \frac{1}{1+1-\frac{T}{2}} = \frac{1}{2(1-\frac{T}{4})} \simeq \frac{1}{2}\left(1+\frac{T}{4}\right)$$

Pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$

$$y(t) \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{T}{4}\right)(1-t)$$

$$y(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{T}{8} + \frac{t}{2}$$



Pour $t \in [\frac{T}{2}, T]$

$$y(t) = \gamma e^{-(t-\frac{T}{2})} \simeq \frac{1}{2}\left(1+\frac{T}{4}\right)\left(1-t+\frac{T}{2}\right)$$

$$y(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{T}{8} - \left(\frac{t}{2} - \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{T}{8} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Pour T grand,

le régime permanent s'installe tout de suite $y(t) \simeq x(t)$.

Pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$, $y(t) = 1$

Pour $t \in [\frac{T}{2}, T]$, $y(t) = 0$