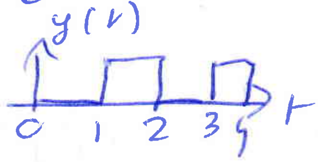
S8Qn1

Corrigé
QCM

Question 1

F A. Si la relation était

$y(t)=x(t-1)$ alors

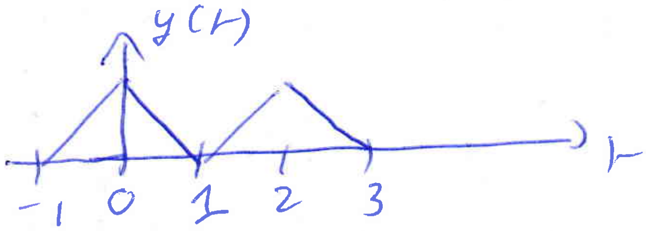


F B. Si la réponse impulsionnelle

était $h(t)=\mathbb{1}_{[-1,0]}(t)$

alors

$$y(t)=h(t)*x(t)$$



V C. Effectivement, $x(t)*h(t)=x(t+1)$

V D. $H(\nu)=TF[\delta(t+1)]=e^{i2\pi\nu}$

et $|H(\nu)|=1$

Question 2

V A. $$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{-\tau}x(\tau)d\tau\right)=e^{-t}x(t)$$

$$\frac{d}{dt}e^{t}=\delta(t)+e^{t}$$ (il y a un saut en $t=0$).

$$\frac{d}{dt}y(t)=(\delta(t)+e^{t})\int_0^t e^{-\tau}x(\tau)d\tau + e^{t}e^{-t}x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t)=y(t)+x(t)$$ Donc c'est vrai

F B. Il est possible de constater que $h(t)$ proposé n'est pas compatible avec ce qui a été trouvé précédemment.

On peut aussi vérifier que

$$\frac{d}{dt} h(t) - h(t) = \delta(t).$$

$$\frac{d}{dt}[h(t)] = \delta(t) - e^{-t} 1_{[0,+\infty[}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[h(t)] - h(t) = \delta(t) - 2e^{-t} 1_{[0,+\infty[}(t) \neq 0$$

Donc c'est Faux.

V C. On peut à partir de la première relation $y(t) = e^{t}\int_0^t e^{-z} x(z)\,dz$ trouver que $h(t) = e^{t} 1_{[0,+\infty[}(t)$

Ou bien on peut noter $Y(\nu) = TF[y(t)]$
$X(\nu) = TF[x(t)]$

$$TF\left[\frac{d}{dt} y(t)\right] = 2i\pi\nu\, Y(\nu)$$

$$TF\left[\frac{d}{dt} y(t) - y(t)\right] = TF[x(t)]$$

prouve que $Y(\nu)(2i\pi\nu - 1) = X(\nu)$

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{1}{2i\pi\nu - 1}$$

F D.

Question 3

F A. On peut s'inspirer de la précédente question pour dire

$$\frac{1}{4i\nu+1} = TF\left[a e^{-bt} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-bt} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \left[\frac{a e^{-bt} e^{-2i\pi\nu t}}{-b-2i\pi\nu}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{a}{b+2i\pi\nu} = \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{2i\pi\nu}{b}}$$

Par identification, on a

$\frac{a}{b} = 1$ et $\frac{2\pi}{b} = 4$ Donc $b = \frac{\pi}{2}$ et $a = \frac{\pi}{2}$.

Enfin $TF\left[\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\right] = \frac{1}{4i\nu+1}$.

En avançant le signal on fait apparaître $e^{i\pi\nu}$.

D'où $h(t) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}(t+\frac{1}{2})} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\infty[}(t)$

Ce n'est pas causal.

F B. $H(0) = 1$

$\lim_{\nu \to +\infty} H(\nu) = 0$ donc cela ressemble à un passe-bas.

F C. $\left|H\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{\left|4i\frac{1}{2}+1\right|} = \frac{1}{|2i+1|} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

donc $\frac{1}{2}$ n'est pas la fréquence de coupure.

V D. $\left|H\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{\left|4i\frac{1}{4}+1\right|} = \frac{1}{|i+1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $\frac{1}{4}$ est la fréquence de coupure

Question 4

$$y(t) = h(t) * x(t) = \frac{1}{2}x(t+1) + \frac{1}{2}x(t-1)$$

F A. $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}(x(\frac{-1}{2}))$

$= \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} \neq 1$

F B. $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}+1) + \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}-1) = 0.$

V C. $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2}+1) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2}-1) = 0$

F D. $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\frac{1}{2}+1) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\frac{1}{2}-1)$

$= \frac{1}{2} \neq 1.$

Question 5

V A. $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$y_1(t) = \frac{t}{2}x_1(t)$

$y_2(t) = \frac{t}{2}x_2(t)$

$y(t) = \frac{t}{2}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]$

$= \alpha\frac{t}{2}x_1(t) + \beta\frac{t}{2}x_2(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Donc la relation est linéaire

F B. $x_2(t) = x_1(t-\tau)$

$y_1(t) = \frac{t}{2}x_1(t)$

$y_2(t) = \frac{t}{2}x_2(t).$

$y_2(t) = \frac{t}{2}x_1(t-\tau)$ et $y_1(t-\tau) = (\frac{t-\tau}{2})x_1(t-\tau)$

Ce n'est pas temps invariant

car $y_2(t) \neq y_1(t-\tau).$

S8,945

V C. $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$.

$y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right)$

$y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{2}\right)$

$y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = \alpha x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \beta x_2\left(\frac{t}{2}\right)$

$= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Donc c'est linéaire.

F D. $x_2(t) = x_1(t-\tau)$

$y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right)$

$y_1(t-\tau) = x_1\left(\frac{t-\tau}{2}\right)$

$y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{2}\right) = x_1\left(\frac{t}{2} - \tau\right)$

Donc $y_2(t) \neq y_1(t-\tau)$.

Ce n'est pas temps invariant.