Exercice 1

On considère a et b, 2 paramètres fixes et différents, $a \neq b$, et $a>0$ et $b>0$.

On considère 2 signaux

$$x_a(t) = \sqrt{a}\, e^{-ta}\, H(t)$$

$$x_b(t) = \sqrt{b}\, e^{-bt}\, H(t)$$

avec $H(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

On considère un filtre temps invariant linéaire qui transforme $x_a(t)$ en $x_b(t)$

1. Montrez que $x_a(t)$ et $x_b(t)$ ont la même énergie

$$E_{x_a} = E_{x_b} = 2.$$

2. Calculez la transformée de Fourier de x_a et x_b..

$$X_a(\nu) = \frac{\sqrt{a}}{a + 2i\pi\nu} \quad \text{et} \quad X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b + 2i\pi\nu}$$

3. Montrez que la réponse fréquentielle est

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a + 2i\pi\nu}{b + 2i\pi\nu} \right)$$

4. Montrez $|H(\nu)| = 1$ pour une seule fréquence qui est ν_0 définie par

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi}.$$

5. Montrez que
$$H(0)=\sqrt{\frac{a}{b}}$$
et que $\lim_{\nu\to+\infty} |H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}$

6. Montrez que
$$|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{1-\frac{(b^2-a^2)}{b^2+4\pi^2\nu^2}}$$

7. Montrez que
$\nu \in]-\infty\ 0$
si $a<b$, $|H(\nu)|$ est décroissant de $-\infty$ à 0
et croissant de 0 à $+\infty$
si $a>b$, $|H(\nu)|$ est croissant de $-\infty$ à 0
et décroissant de 0 à $+\infty$.
Si $a<b$, c'est un pass-haut et si $a>b$, c'est un passe-bas.

8. Montrez que
$$H(\nu)=\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{a-b}{b+2i\pi\nu}$$

9. En observant que $X_b(\nu)=\frac{\sqrt{b}}{b+2i\pi\nu}$
Montrez que la réponse impulsionnelle
$$h(t)=\sqrt{\frac{b}{a}}\,\delta(t)+\left(1-\frac{b}{a}\right)\sqrt{b}\,e^{-bt}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\,\sqrt{a}$$

10. Montrez que la relation entrée-sortie peut s'exprimer ainsi.
$$y(t)=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x(t)+\sqrt{ab}\left(1-\frac{b}{a}\right)e^{-bt}\int_0^t e^{b\tau}x(\tau)\,d\tau$$
lorsque $x(t)$ est causal.

11. Montrez que si $x(t)=x_a(t)$ alors $y(t)=x_b(t)$.

exercice2

On considère un filtre dont la relation entrée-sortie est définie par

$$\frac{d}{dt}y(t) + by(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{d}{dt}x(t) + \sqrt{ab}\,x(t)$$

Montrez que la relation entrée-sortie est

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{a + i2\pi\nu}{b + i2\pi\nu}$$