exercice 1

1. $E_{x_a} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_a(t)|^2 dt$

$E_{x_a} = (\sqrt{a})^2 \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = (\sqrt{a})^2 \left[-\frac{e^{-2at}}{2a} \right]_0^{+\infty}$

$E_{x_a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ De même pour x_b

2. $x_a(t)$ est non-périodique

$X_a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$

$X_a(\nu) = \int_0^{+\infty} \sqrt{a}\, e^{-at} e^{-2i\pi\nu t} dt$

$X_a(\nu) = \left[-\sqrt{a} \frac{e^{-at-2i\pi\nu t}}{a+2i\pi\nu} \right]_0^{+\infty}$

$X_a(\nu) = \frac{\sqrt{a}}{a+2i\pi\nu}$

De même pour $X_b(\nu)$

3. Pour un filtré donné, la réponse fréquentielle est

$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)}$ où $Y(\nu) = TF[y(t)]$
$X(\nu) = TF[x(t)]$

et $y(t)$ est la sortie

et $x(t)$ est l'entrée.

$H(\nu)$ ne dépend pas de l'entrée ou de la sorties, c'est fixe.

Ici on souhaite que dans le cas particulier où $x(t) = x_a(t)$, on ait $y(t) = x_b(t)$.

Et donc $X(\nu) = X_a(\nu)$ et $Y(\nu) = X_b(\nu)$

Donc $H(\nu) = \frac{X_b(\nu)}{X_a(\nu)} = \frac{\sqrt{b}}{b+2i\pi\nu} \times \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{a}}{a+2i\pi\nu}\right)}$

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \times \frac{a+2i\pi\nu}{b+2i\pi\nu}$$

4. $|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{|a+2i\pi\nu|}{|b+2i\pi\nu|} = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{a^2+4\pi^2\nu^2}}{\sqrt{b^2+4\pi\nu^2}}$

on cherche ν tel que $|H(\nu)| = 1$

$$\frac{b}{a} \frac{a^2+4\pi^2\nu^2}{b^2+4\pi\nu^2} = 1$$

$$ba^2 + 4\pi^2\nu^2 b = ab^2 + 4\pi^2\nu^2 a$$

$$4\pi^2\nu^2(b-a) = ab(b-a)$$

$b \neq a$ donc

$4\pi^2\nu^2 = ab$ et finalement $\nu = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi}$

5. $H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{a+2i\pi\nu}{b+2i\pi\nu}$ $\quad H(0) = \sqrt{\frac{b}{a}} \times \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

$|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{a^2+4\pi^2\nu^2}}{\sqrt{b^2+4\pi^2\nu^2}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{1+\frac{a^2}{4\pi^2\nu^2}}{1+\frac{b^2}{4\pi^2\nu^2}}} \to 1 \times \sqrt{\frac{b}{a}}$

si $\nu \to +\infty$

6. $\frac{a^2+4\pi^2\nu^2}{b^2+4\pi^2\nu^2} = \frac{b^2+4\pi^2\nu^2+a^2-b^2}{b^2+4\pi^2\nu^2} = 1 - \frac{(b^2-a^2)}{b^2+4\pi^2\nu^2}$

Donc $|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{1 - \frac{(b^2-a^2)}{b^2+4\pi^2\nu^2}}$

Une autre façon de raisonner est de chercher α et β tel que

$$|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{b^2+4\pi^2\nu^2}}$$

En identifiant les deux expressions, on a

$$\alpha - \frac{\beta}{b^2+4\pi^2\nu^2} = \frac{a^2+4\pi^2\nu^2}{b^2+4\pi^2\nu^2}$$

donc $\dfrac{\alpha(b^2+4\pi^2\nu^2)-\beta}{b^2+4\pi^2\nu^2} = \dfrac{a^2+4\pi^2\nu^2}{b^2+4\pi^2\nu^2}$

donc $\begin{cases} \alpha b^2 - \beta = a^2 \\ \alpha 4\pi^2\nu^2 = 4\pi^2\nu^2 \end{cases}$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = b^2 - a^2$.

7. • La fonction $\nu \mapsto b^2+4\pi^2\nu^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

• Si $a<b$, $b^2-a^2>0$ et $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+4\pi^2\nu^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

$1-\dfrac{(b^2-a^2)}{b^2+4\pi^2\nu^2}$ est croissante sur $[0, +\infty[$

$|H(\nu)|$ est croissante sur $[0, +\infty[$

• Si $a>b$, $b^2-a^2<0$ et $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+4\pi^2\nu^2}$ est croissante sur $[0, +\infty[$

$1-\dfrac{(b^2-a^2)}{b^2+4\pi^2\nu^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$

$|H(\nu)|$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'après le cours, $H(\nu)$ est la TF d'un signal réel donc $|H(\nu)|$ est pair.

D'où $a<b \Rightarrow |H(\nu)|$ est un passe-haut

$a>b \Rightarrow |H(\nu)|$ est un passe-bas.

S8, G4

8. $H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{a + i2\pi\nu}{b + i2\pi\nu}$

$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \times \frac{(b + i2\pi\nu) + (a-b)}{b + i2\pi\nu}$

$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \left(1 + \frac{a-b}{b+i2\pi\nu} \right)$

9. On sait que $TF[\sqrt{b}\, e^{-bt} H(t)] = \frac{\sqrt{b}}{b+i2\pi\nu}$

Donc $TF^{-1}\left[\frac{1}{b+i2\pi\nu} \right](t) = e^{-bt} H(t)$

or $TF^{-1}[1] = \delta(t)$

Donc $h(t) = TF^{-1}[H(\nu)] = \sqrt{\frac{a}{b}}\, \delta(t) + \sqrt{\frac{a}{b}}(a-b) e^{-bt} H(t)$

$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\, \delta(t) + \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-bt} H(t)$

10. La relation entrée-sortie est

$y(t) = h(t) * x(t)$

$\delta(t) * x(t) = x(t)$

$e^{-bt} * x(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

($x(t)$ étant causal)

$= e^{-bt} \int_0^t e^{b\tau} x(\tau) d\tau$

D'où $y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\, x(t) + \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-bt} \int_0^t e^{b\tau} x(\tau) d\tau$
pour $t \geq 0$,

11. $x(t) = x_a(t) = \sqrt{a}\, e^{-at} H(t)$.

$$\int_0^t e^{b\tau} x(\tau) d\tau = \int_0^t e^{b\tau} \sqrt{a}\, e^{-a\tau} d\tau$$

$$= \sqrt{a} \left[\frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a} \right]_0^t$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{b-a} \left(e^{(b-a)t} - 1 \right)$$

Donc pour $t \geq 0$ $\quad H(t) = 1$

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{a}\, e^{-at} H(t)$$
$$+ \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-bt} \frac{\sqrt{a}}{b-a} \left(e^{(b-a)t} - 1 \right)$$

$$y(t) = \sqrt{b}\, e^{-at} H(t)$$
$$+ \sqrt{\frac{b}{a}} (a-b) e^{-bt} \frac{\sqrt{a}}{b-a} \left(e^{(b-a)t} - 1 \right)$$

$$y(t) = \sqrt{b}\, e^{-at} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} (-1) e^{-bt} e^{(b-a)t}$$
$$+ \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} e^{-bt}$$

$$y(t) = \sqrt{b}\, e^{-at} + \sqrt{b}\, (-1) e^{-at} + \sqrt{b}\, e^{-bt}$$

$$y(t) = x_b(t).$$

exercice 2

On pose $Y(\nu) = TF[y(t)](\nu)$
et $X(\nu) = TF[x(t)](\nu)$

$$TF\left[\frac{d}{dt} y(t) + b y(t)\right] = i2\pi\nu\, Y(\nu) + b Y(\nu)$$

$$TF\left[\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{d}{dt} x(t) + \sqrt{ab}\, x(t)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{b}{a}}\, i2\pi\nu\, X(\nu) + \sqrt{ab}\, X(\nu)$$

Donc $\left(b + i2\pi\nu\right) Y(\nu) = \left(\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{b}{a}}\, i2\pi\nu\right) X(\nu)$

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{b}{a}}\, i2\pi\nu}{b + i2\pi\nu}$$

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a + i\pi 2\nu}{b + i2\pi\nu}\right)$$