Séance 8
Cours sur les filtres

① Définition d'un filtre

$$x(t) \xrightarrow{*h(t)} y(t)$$

$x(t)$: entrée du filtre
$y(t)$: sortie du filtre
$h(t)$: réponse impulsionnelle

$$y(t) = \mathcal{H}\left[x(t)\right](t)$$

Un filtre transforme un signal défini de $-\infty$ à $+\infty$ en un signal défini de $-\infty$ à $+\infty$.

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

② Lien avec la transformée de Fourier

$$X(\nu) \xrightarrow{\times H(\nu)} Y(\nu)$$

$X(\nu)$: transformée de Fourier de $x(t)$
$Y(\nu)$: transformée de Fourier de $y(t)$
$H(\nu)$: réponse fréquentielle
aussi appelée fonction de transfert.

$$Y(\nu) = H(\nu)\, X(\nu)$$

$$H(\nu) = TF\left[h(t) \right](\nu)$$

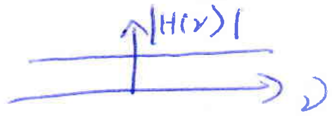
③ Exemples de filtres

Filtre à retard:

$$y(t) = x(t-1)$$

$$h(t) = \delta(t-1)$$

$$H(\nu) = e^{-2i\pi\nu}$$

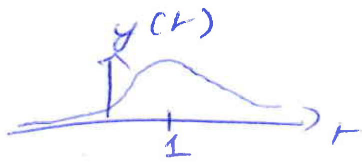


passe-tout causal

Si $x(t) = e^{-t^2}$

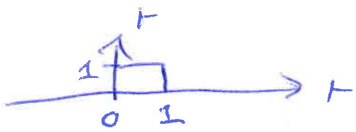
$$y(t) = e^{-(t-1)^2}$$

$\Longrightarrow$



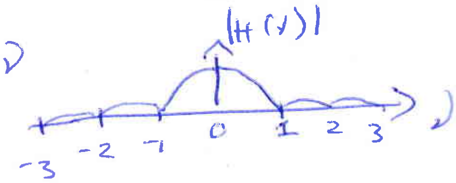
filtre moyenneur:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\, d\tau$$



$$h(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

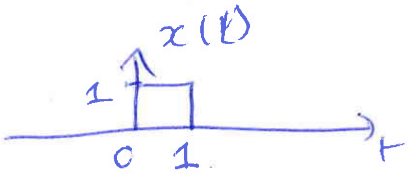
$$H(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{-i\pi\nu}$$

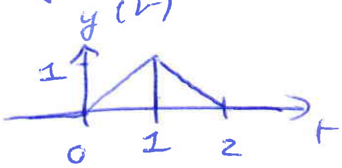


passe-bas Causal

Si $x(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

$$y(t) = (1 - |t-1|)\, \mathbb{1}_{[0,2]}(t)$$

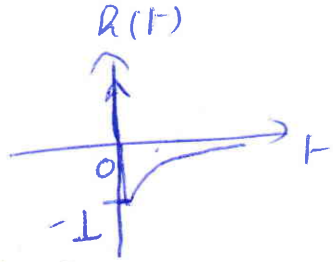




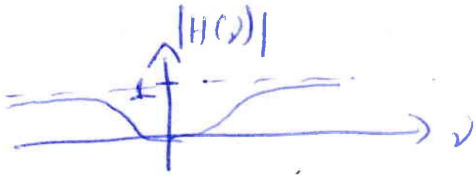
Filtre dérivateur

$$\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$



$$H(\nu) = \frac{2i\pi\nu}{2i\pi\nu + 1}$$



causal
passe-haut

④ Qualificatifs décrivant un filtre

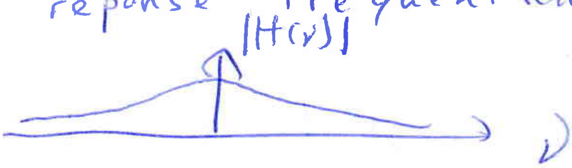
* un filtre est causal si $h(t) = 0$ pour $t < 0$.

Pour un tel filtre, le passé ne peut modifier le futur.

exemple un filtre ~~non~~ causal : $y(t) = x(t+1)$

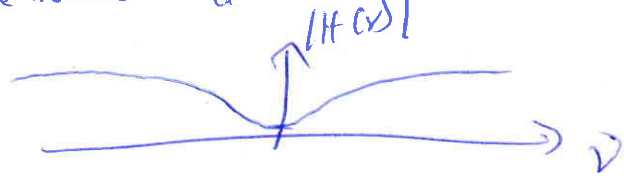
un filtre non-causal : $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau) d\tau$

* un filtre est un passe-bas si la réponse fréquentielle en module ressemble à



$$|H(0)| > \lim_{\nu \to +\infty} |H(\nu)|$$

* un filtre est un passe-haut si la réponse fréquentielle en module ressemble à



$$|H(0)| < \lim_{\nu \to +\infty} |H(\nu)|$$

* fréquence de coupure

$$|H(\nu_c)| = \max_f |H(\nu)| \times \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(5) Propriétés d'un filtre

* Linéarité

Si $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

on peut aussi bien mettre $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en entrée du filtre

$$y_1(t) = \mathcal{H}[x_1(t)](t)$$
$$y_2(t) = \mathcal{H}[x_2(t)](t)$$

puis le combiner $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

ou bien mettre en entrée du filtre $x(t)$.

$$y(t) = \mathcal{H}[x(t)](t)$$

* ~~Temps Invariance~~ Invariance par rapport à un retard.

Si $x_2(t) = x_1(t-\tau)$

on peut aussi bien mettre en entrée

$x_1(t)$

$$y_1(t) = \mathcal{H}[x_1(t)](t)$$

et retarder la sortie

$$y_2(t) = y_1(t-\tau)$$

ou bien mettre en entrée du filtre $x_2(t)$

$$y_2(t) = \mathcal{H}[x_2(t)](t).$$

(6) Trouver la réponse impulsionnelle la réponse fréquentielle, la relation entrée-sortie

* Si on met en entrée $x(t) = \delta(t)$
alors $y(t) = h(t)$

* Si on a $h(t)$, la relation entrée-sortie est $y(t) = h(t) * x(t)$

* Si on a une équation différentielle

$$TF\left[\frac{d x(t)}{dt}\right] = 2i\pi\nu X(\nu)$$

$$TF\left[\frac{d}{dt} y(t)\right] = 2i\pi\nu Y(\nu)$$

* A partir d'une fraction rationnelle pour la réponse fréquentielle

$$H(\nu) = \frac{(2i\pi\nu)(-1)}{4(2i\pi\nu) + 1}$$

$$4\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = -\frac{d}{dt} x(t).$$