exercice 1

On considère $x_1(t) = \mathbb{1}_{[-1/2,\,1/2]}(t)$, $x_2(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$

et $y_1(t) = x_1(t) * x_1(t)$

$y_2(t) = x_2(t) * x_2(t)$

1. Montrez que $y_1(0) = 1$
2. Montrez que $y_1(t)$ est nul pour $|t| \leq -1$
3. Montrez que $y_1(t)$ est pair
4. Pour $t \in [0, 1]$, montrez que $y_1(t) = 1 - t$
5. En déduire que $y_1(t) = (1 - |t|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$
6. On pose $x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{b-a}\right)$ et $y_3(t) = x_3(t) * x_3(t)$, montrez que $y_3(t) = \big((b-a) - |t|\big)\,\mathbb{1}_{[-(b-a),\,b-a]}(t)$
7. Montrez que
   $x_2(t) = x_3\left(t - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)$
8. Montrez que
   $y_2(t) = \left[(b-a) - |t-a-b|\right]\mathbb{1}_{[2a,2b]}(t)$
9. Montrez que
   $y_2(t)$ est symétrique par rapport à $t = a+b$
   c'est-à-dire que $t \mapsto y_2(t+a+b)$ est pair.

exercice 2

on considère $x(t)=\mathbb{1}_{[-1/2,\,1/2]}(t)$ et $y(t)=e^{-|t|}$

on cherche à calculer $z(t)= x(t) * y(t)$

1. Montrez que $z(0)=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$
2. Montrez que $z(1)=1-\frac{1}{e^2}$
3. Montrez que $z(t)=\int_{t-1}^{t+1} e^{-|\tau|}\,d\tau$
4. Montrez que pour $t>1$, $|z(t)|\leq 2e\,e^{-t}$
   En déduire que $\lim_{t\to+\infty} z(t)=0$
5. Montrez que $z(t)$ est pair
6. Montrez que $\frac{d}{dt}z(t)= e^{-|t+1|}-e^{-|t-1|}$
7. Montrez que $z(t)$ est décroissante pour $t>0$
8. Montrez que $z(t)$ a une tangente horizontale en $t=0$, et une tangente à gauche et à droite de $t=1$ identique.

exercice 3

On considère un signal $x(t)=\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

et $y(t)= x(t)+2x(t-1)+x(t-2)$

On sait que $a(t)=x(t) * x(t)=(1-|t-1|)\mathbb{1}_{[0,2]}(t)$

on cherche à calculer $z(t)=x(t) * y(t)$

1. On pose $a(t)= x(t) * x(t)$
   Montrez que $z(t)= x(t) * y(t)= a(t)+2a(t-1)+a(t-2)$

2. Au moyen d'une représentation graphique, représentez $z(t)$.

3. Montrez que $z(t)$ est symétrique par rapport à $t=2$:

$z(2-t) = z(2+t)$