S7, Cr1

exercice 1

1. $y_1(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, x_1(0-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(\tau))^2 d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau = 1$

car x_1 est pair

2. Du fait que $x_1(t)=0$ pour $|t|>1/2$,

$y_1(t)=\int_{-1/2}^{1/2} x_1(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau$

Quand $|t|\geq 1$, $|t-\tau|\geq \frac{1}{2}$ et donc $x_1(t-\tau)=0$

donc $y_1(t)=0$.

3. $x_1(t)$ est pair donc $y_1(t)$ est pair

4. Pour $t\in[0,1]$, $y_1(t)=\int_{-1/2}^{1/2} x_1(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau$

$x_1(\tau)=1$

$x_1(t-\tau)=1 \iff -\tau+t\in[-1/2,1/2] \iff \tau\in[t-1/2,t+1/2]$

sinon $x(t-\tau)=0$

Donc $y_1(t)=\int_{t-1/2}^{1/2} d\tau = 1/2-(t-1/2)=1-t$.

5. D'après 3, $y_1(t)=(1-t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ pour $t\geq 0$.

$y_1(t)$ est pair donc $y_1(t)=(1-|t|)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

6. $y_3(t)=x_3(t)*x_3(t)=(b-a)\, y_1\left(\frac{t}{b-a}\right)$

$y_3(t)=(b-a)\left[1-\left|\frac{t}{b-a}\right|\right]\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}\left(\frac{t}{b-a}\right)$

$y_3(t)=\left[(b-a)-|t|\right]\mathbb{1}_{[-(b-a),(b-a)]}(t)$

7. Si $t<a$, $x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)=x_1\left(\frac{t-\frac{(a+b)}{2}}{b-a}\right)$

$\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a} < \frac{a-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}{b-a} = -\frac{1}{2}$ donc $x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)=0$

S7, Cr2

Si $t\in[a,b]$, $x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)=x_1\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)$

$$\underbrace{a-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}_{=\frac{-(a-b)}{2}}\leq t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\leq b-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{b-a}{2}$$

donc

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\leq\frac{1}{2}\quad\text{et } x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)=1.$$

Si $t>b$, $x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)=x_1\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)$

$$t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}>b-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{b-a}{2}$$

$$\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}>\frac{1}{2}$$

donc $x_3\left(t-\frac{a+b}{2}\right)=0$.

Finalement $x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)=1\!\!1_{[a,b]}(t)=x_2(t)$

8. $y_2(t)=x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)*x_3\left(t-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)$

$$=y_3(t-a-b)=\left[(b-a)-|t-a-b|\right]\times 1\!\!1_{[-(b-a),(b-a)]}(t-a-b)$$

$$=\left[(b-a)-|t-a-b|\right]1\!\!1_{[2a,2b]}(t)$$

9. $y_2(-t+a+b)=\left[(b-a)-|-t|\right]1\!\!1_{[2a,2b]}(-t+a+b)$

$$=\left[(b-a)-|t|\right]1\!\!1_{[a-b,b-a]}(-t)$$

$$=\left[(b-a)-|t|\right]1\!\!1_{[a-b,b-a]}(t)$$

$$=\left[(b-a)-|t+a+b-a-b|\right]1\!\!1_{[2a,2b]}(t+a+b)$$

$$=y_2(t+a+b).$$

exercice 2

1. $z(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{1} e^{-|-\tau|}\, d\tau$

$z(0)= 2\int_{0}^{1} e^{-\tau} d\tau = 2\left[-e^{-\tau}\right]_0^1 = 2(1-e^{-1})$

2. $z(1)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(1-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{1} e^{-|1-\tau|}\, d\tau$

$z(1)= \int_{-1}^{1} e^{\tau-1} d\tau = \left[e^{\tau-1}\right]_{-1}^{1} = e^{0}-e^{-2}$

3. $z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[-1,1]}(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$

$z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[-1,1]}(\tau-t)\, y(\tau)\, d\tau$

$z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{[t-1,t+1]}(\tau)\, y(\tau) d\tau = \int_{t-1}^{t+1} e^{-|\tau|} d\tau$

4. Pour $t \geqslant 1$, $e^{-|\tau|} = e^{-\tau} \geqslant e^{-(t-1)}$ quand $\tau\in[t-1,t+1]$

Donc $|z(t)| \leq \int_{t-1}^{t+1} e^{-(t-1)} d\tau = 2e\,e^{-t}$

$e^{-t} \to 0$ quand $t\to+\infty$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$.

5. $x(t)$ est pair et $y(t)$ est pair
donc $z(t)$ est pair

6. $\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

Donc $\frac{d}{dt}z(t) = (\delta(t+1) - \delta(t-1)) * y(t)$

$= y(t+1) - y(t-1)$

$= e^{-|t+1|} - e^{-|t-1|}$

7. $|t+1|$ peut se voir comme la distanke de t à -1
$|t-1|$ comme la distance de t à 1
Pour $t>0$, $|t-1| \leq |t+1|$
Donc $e^{-|t+1|} \leq e^{-|t-1|}$
Donc $z(t)$ est décroissante de 0 à $+\infty$.

8. Pour $t=0$, $\frac{d}{dt}z(t) = e^{-1} - e^{-1} = 0$
Pour $t\in[0,1[$, $\frac{d}{dt}z(t) = e^{-t-1} - e^{-1+t} \rightarrow e^{-2} - 1 < 0$
Pour $t\in]1,+\infty[$, $\frac{d}{dt}z(t) = e^{-t-1} - e^{-t+1} \rightarrow e^{-2} - 1 < 0$

S7, C5

exercice 3

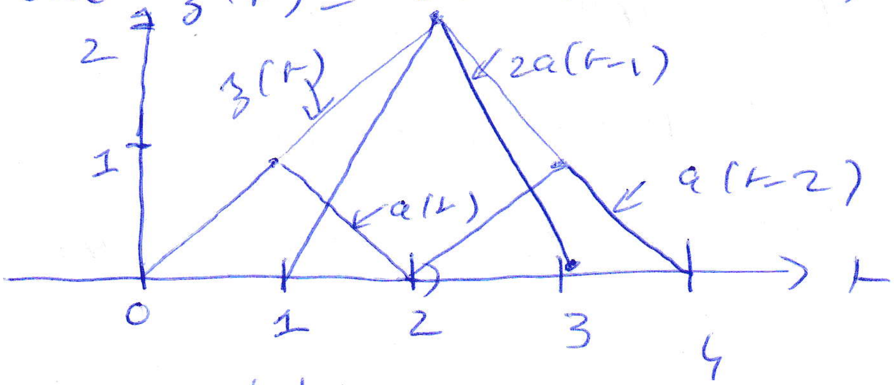
1. $x(t) * x(t) = a(t)$

$x(t) * x(t-1) = a(t-1)$

$x(t) * x(t-2) = a(t-2)$

donc $z(t) = a(t) + 2a(t-1) + a(t-2)$

2.



3. Première solution :

$z(2-t) = (x(t) * y(t))(2-t)$

$= (x(-t) * y(-t))(t-2)$

$= (x(-(t-1/2)) * y(-(t-3/2)))(t)$

$= (x(1/2 - t) * y(3/2 - t))(t).$

Il se trouve que $x(t)$ est symétrique par rapport à $t = 1/2$. $x(1/2 - t) = x(1/2 + t)$

Et $y(3/2 - t) = x(3/2 - t) + 2x(1/2 - t) + x(-1/2 - t)$

$= x(1/2 - (t-1)) + 2x(t + 1/2) + x(1/2 - (t+1))$

$= x(1/2 + (t-1)) + 2x(t + 1/2) + x(1/2 + (t+1))$

$= x(t + 3/2 - 2) + 2x(t + 3/2 - 1) + x(t + 3/2)$

$= y(t + 3/2).$