Séance 7
Produit de convolution

① Définition du produit de convolution

$x(t)$ et $y(t)$ signaux continus
L'un des deux doit être non-périodique.

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

② Linéarité

$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ alors $x(t) * (\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) = x(t) * y(t)$

③ Commutatif

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

④ Associatif

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$$

⑤ Valeur en 0 :

$$z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(-\tau)\, d\tau$$

⑥ Causalité

Si $x(t) = 0$ pour $t < 0$ (causal)
Si $y(t) = 0$ pour $t < 0$ (causal)
alors $z(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$

7 Parité

$$z(t) = x(t) * y(t)$$
$$z(-t) = x(-t) * y(-t)$$

$x(t)$ et $y(t)$ pairs $\Rightarrow z(t)$ pair

$\left.\begin{array}{l} x(t) \text{ pair et } y(t) \text{ impair} \\ x(t) \text{ impair et } y(t) \text{ pair} \end{array}\right\} \Rightarrow z(t)$ impair

$x(t)$ et $y(t)$ impairs $\Rightarrow z(t)$ pair

8 Dilatation de l'échelle des temps

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$$
$$y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{a}\right) \quad \text{et} \quad y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{a}\right)$$
$$y_3(t) = y_1(t) * y_2(t)$$

alors $y_3(t) = a\, x_3\left(\frac{t}{a}\right)$

9 Dérivation

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) * y(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) * y(t)$$
$$= x(t) * \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)$$

10 Retard

$$y_1(t) = x_1(t - \tau_1)$$
$$y_2(t) = x_2(t - \tau_2)$$

alors $y_1(t) * y_2(t) = \left(x_1(t) * x_2(t)\right)(t - \tau_1 - \tau_2)$

S7, C3

(11) Convolution avec Dirac

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

$$x(t) * \delta'(t-a) = x'(t-a)$$

$$x(t) * 1_{[0,+\infty[}(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} x(\tau)\,d\tau.$$

(12) Transformée de Fourier

$$TF[x(t) * y(t)] = TF[x(t)]\,TF[y(t)]$$

(13) Exemples

- $e^{i\nu_0 2\pi t} * x(t) = e^{i\nu_0 2\pi t} X(\nu_0)$
- $1 * x(t) = X(0)$
- gaussienne convoluée à une gaussienne est une gaussienne.