Exercices
Séance 6

exercice 1

$H(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

Dans cet exercice, on admet que

$$TF[H(t)](\nu) = \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

et on cherche à calculer $TF[\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)](\nu)$

1/ Montrez que $\mathbb{1}_{[-1/2,1/2[}(t) = H(t+1/2) - H(t-1/2)$

2/ Montrez que

$$TF[\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)] = TF[H(t)](\nu) \times 2i\sin(\pi\nu)$$

3/ Montrez que $\delta(\nu)\sin(\pi\nu) = 0$

4/ Montrez que $\frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right) 2i\sin\pi\nu = \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}$

En déduire que $TF[\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)] = \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}$

exercice 2

On cherche à calculer la transformée de Fourier

de $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1,0[\\ 2-t & \text{si } t \in [0,1[\\ t & \text{si } t \in [1,2[\\ 2 & \text{si } t \in [2,3[\\ 0 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

1. On pose $x_a(t) = 2\mathbb{1}_{[-1,3]}(t)$

Sachant que $TF\left[\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\right] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$

Montrez que $X_a(\nu) = TF[x_a(t)] = 2\frac{\sin 4\pi\nu}{\pi\nu}e^{-2i\pi\nu}$

$$X_a(\nu) = 2\frac{\sin 4\pi\nu}{\pi\nu}e^{-2i\pi\nu}$$

2. On pose $x_b(t) = t\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

Montrez que $X_b(\nu) = TF[x_b(t)](\nu) =$

$$X_b(\nu) = \frac{(1+2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

3. Montrez que $TF[x(-t)](\nu) = TF[x(t)](-\nu)$
et que $TF[x(1-t)](\nu) = e^{-2i\pi\nu}TF[x(t)](-\nu)$

4. On pose $x_c(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$
Montrez que $x_c(t) = x_b(t+1) + x_b(1-t)$
en utilisant une construction graphique.

5. Montrez que
$$X_c(\nu) = X_b(\nu)e^{2i\pi\nu} + X_b(-\nu)e^{-2i\pi\nu}$$
où $X_c(\nu) = TF[x_c(t)]$.

S6, E3

6. Montrez que

$$X_c(\nu) = \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2 \nu^2}$$

7. En utilisant une construction graphique, montrez que

$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

8. Montrez que

$$X(\nu) = \left(\frac{2 \sin 4\pi\nu}{\pi\nu} - \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2\nu^2} \right) e^{-2i\pi\nu}$$