Séance 6

L'objet de ce cours est de faire une révision sur les 5 précédentes séances.

① Définition de la TF

cas non-périodique $X(\nu)$ n'a pas de raies

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

cas périodique $X(\nu)$ a des raies

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2i\pi \frac{kt}{T}}$$

$$\nu_k = \frac{k}{T}$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2i\pi \frac{kt}{T}}$$

Lien entre les deux cas.

$y(t) = x(t) \, \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$ avec $x(t)$ périodique de période T

$$X_k = \frac{1}{T} Y\left(\frac{k}{T}\right)$$

② Linéarité

cas non-périodique et périodique (même période)

$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$
$\Rightarrow Z(\nu) = \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$

$z(t) = \alpha\, x(t) + \beta y(t)$
$\Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$

③ Valeurs en zéro

cas non-périodique

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,d\nu$$

cas périodique

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k$$

④ Puissance / énergie

cas non-périodique

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\,d\nu$$

cas périodique

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

⑤ Dilatation de l'échelle des temps

cas non-périodique

$$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$Y(\nu) = a\,X(a\nu)$$

cas périodique

$$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$Y_k = X_k$$

6 Retard

cas non-périodique

$$y(t) = x(t-\tau)$$

$$Y(\nu) = X(\nu)\,e^{-2i\pi\nu\tau}$$

cas périodique

$$y(t) = x(t-\tau)$$

$$Y_k = X_k\,e^{-2i\pi\frac{k}{T}\tau}$$

7 Modulation

cas non-périodique

$$y(t) = x(t)\,e^{i\nu_0 2\pi t}$$

$$Y(\nu) = X(\nu-\nu_0)$$

8 Dérivation / Intégration

cas non-périodique

$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ $\qquad Y(\nu) = 2i\pi\nu X(\nu)$

$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$ $\qquad Y(\nu) = \frac{1}{2i\pi}\,vp\left(\frac{1}{\nu}\right)X(\nu) + C\,\delta(\nu)$

où $C = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) + \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$

$y(t) = t\,x(t)$ $\qquad Y(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\frac{d}{d\nu}X(\nu)$

$y(t) = vp\left(\frac{1}{t}\right)x(t)$ $\qquad Y(\nu) = C' - 2i\pi\int_0^\nu X(f)\,df$

où C' est une constante.

9 Parité

Cas non périodique

$y(t) = x(-t) \Rightarrow Y(\nu) = X(-\nu)$

Aussi $y(t)$ paire $\Rightarrow Y(\nu)$ pair.
$y(t)$ impair $\Rightarrow Y(\nu)$ impair

Cas périodique

$y(t) = x(-t) \Rightarrow Y_k = X_{-k}$

Aussi $y(t)$ pair
$\Rightarrow Y_k$ pair
$y(t)$ impair
$\Rightarrow Y_k$ impair.

Cas non-périodique

$y(t) = x(t)^* \Rightarrow Y(\nu) = X(-\nu)^*$

Aussi $x(t)$ réel et pair
alors $X(\nu)$ réel et pair

$x(t)$ réel et impair
alors $X(\nu)$ imaginaire et impair

Cas périodique

$y(t) = x(t)^* \Rightarrow Y_k = X_{-k}^*$

$x(t)$ réel et pair
alors X_k réel et pair

$x(t)$ réel et impair
alors X_k réel et impair

Aussi
$x(t)$ réel $\Rightarrow |X(\nu)|$ pair
$x(t)$ réel $\Rightarrow \arg(X(\nu))$ impair

$x(t)$ réel $\Rightarrow$
$|X_k|$ pair
$\arg(X_k)$ impair