exercice 1

On considère un signal

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t} \qquad \text{avec } \alpha > 0 \text{ et } \omega_0 \in$$

Par ailleurs, on sait que

$$x_n(t) = e^{-\pi t^2} \qquad X_n(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$$

1. On définit $x_1(t) = x_n(t)\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$
   montrez que $X_1(\nu) = X_n(\nu)\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$

2. On définit $x_2(t) = x_1\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, t\right)$
   Montrez que $x_2(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha t^2}$
   et que $X_2(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\nu^2}$

3. On définit $x_3(t) = x_2(t)\, e^{i\omega_0 t}$
   Montrez que $X(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right)^2}$

exercice 2

On considère un signal complexe

$$y(t) = \frac{1}{t+i} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

On cherche un spectre de la forme

$$Y(\nu) = a\, e^{-b\nu} H(\nu) \qquad \text{où } H(\nu) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(\nu)$$

1. En utilisant la valeur $y(0) = \frac{1}{i}$
   montrez que $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$

2. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \pi$, montrez en calculant l'énergie que $\frac{|a|^2}{2\,Re(b)} = \pi$

Indication : $e^{-b\nu} = e^{-Re(b)\nu}\, e^{-i Im(b)\nu}$

3. On suppose maintenant que $Im(b)=0$, montrez que les deux conditions précédentes montrent que
$$Y(\nu) = H(\nu)\, e^{-2\pi\nu}\,(-2i\pi)$$

4. En appliquant la transformée de Fourier inverse à $Y(\nu)$, montrez qu'effectivement
$$Y(\nu) = H(\nu)\,(-2i\pi)\,e^{-2\pi\nu}.$$

<u>exercice 3</u>

On définit un signal

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in]-1,0[\\ 2-t & \text{si } t \in]0,1[\\ t & \text{si } t \in]1,2[\\ 2 & \text{si } t \in]2,3[\\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1. Tracez sa courbe représentative.
2. Calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$, en déduire que $X(0) = 7$
3. En observant que $x(0) = 2$, montrez que $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,d\nu = 2$

S5, E3

4. En calculant l'énergie E_x, montrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu = 12 + \frac{2}{3}$$

5. On considère $y(t) = x(t+1)$

Montrez que $y(t)$ est pair

Quel est l'argument de $Y(\nu)$

Exprimez $x(t)$ en fonction de $y(t)$

Exprimez $X(\nu)$ en fonction de $Y(\nu)$

Montrez qu'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$

tel que $\arg(X(\nu)) = -2\pi\nu + \ell\pi$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs ou négatifs. ℓ dépend de ν.

6. En observant que $Y(\nu) \in \mathbb{R}$

Montrez que $Re(X(\nu)) = \frac{X(\nu)}{2} + \frac{1}{2}X(\nu)^*$

$= TF\left[\frac{1}{2}x(t+2) + \frac{1}{2}x(t)\right]$

7. Avec un changement de variable $t' = -t$, montrez que

$Re(X(\nu)) = TF\left[\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t)\right]$

indication : $x(t)$ est réel.

8. Représentez graphiquement

$TF^{-1}\left[Re(X(\nu))\right]$