S5, corr I

exercice 1

1. $X_1(\nu) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, X_n(\nu) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\pi\nu^2}$

2. $x_2(t) = x_1\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, t\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\pi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^2 t^2}$

$x_2(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha t^2}$

$X_2(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, X_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\nu\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\nu\right)^2}$

$X_2(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\nu^2}$

3. $x_3(t) = x_2(t)\, e^{i\omega_0 t} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t} = x(t)$

$x_3(t) = x_2(t)\, e^{2i\pi \frac{\omega_0}{2\pi} t}$

$X_3(\nu) = X_2\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right)^2}$

exercice 2

1. • $y(0) = \frac{1}{0+i} = \frac{1}{i}$

• $y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu)\, d\nu = \int_0^{+\infty} a\, e^{-b\nu}\, d\nu = \frac{a}{b}$

Donc $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$

2. $E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |y(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \pi$

$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\nu)|^2 d\nu = |a|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|e^{-b\nu}|^2 d\nu$

$|e^{-b\nu}|^2 = e^{-2Re(b)\nu}$ Suite 2

$E_y = |a|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2Re(b)\nu} d\nu = \frac{|a|^2}{2Re(b)}$

Donc $\frac{|a|^2}{2Re(b)} = \pi$

3. On suppose que $b \in \mathbb{R}$

Donc $a = -ib$

$\frac{|a|^2}{2Re(b)} = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2} = \pi$

donc $b = 2\pi$ et $a = -2i\pi$

$\cancel{Y}(\nu) = H(\nu)\, e^{-2\pi\nu} \; (-2i\pi)$

Attention on a seulement prouvé que si $\cancel{Y}(\nu) = a e^{-b\nu} H(\nu)$ et que $b \in \mathbb{R}$ alors $Y(\nu) = -2i\pi\, H(\nu)\, e^{-2\pi\nu}$.

4. $TF^{-1}[Y(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} d\nu$

$TF^{-1}[Y(\nu)] = -2i\pi \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\nu} e^{2i\pi\nu t} d\nu$

$= -2i\pi \left[\frac{e^{-2\pi\nu} e^{2i\pi\nu t}}{-2\pi + 2i\pi t} \right]_0^{+\infty}$

$= -2i\pi \times \frac{1}{2\pi - 2i\pi t}$

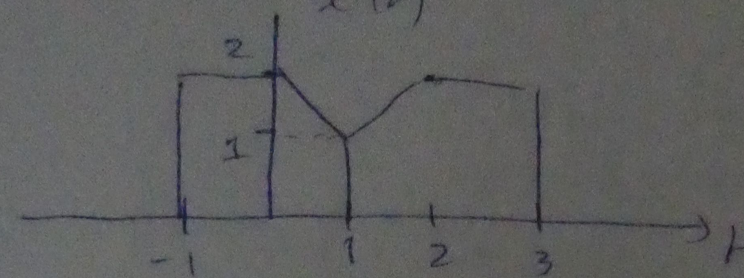
$= \frac{1}{i + t} = y(t)$

Donc $TF[y(t)] = -2i\pi H(\nu) e^{-2\pi\nu}$.

exercice 3

Ss, corr3

1



2. $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 2\left(\int_1^2 t\,dt + \int_2^3 2\,dt\right)$

symétrie de $x(t)$

$X(0) = 2\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + 1\times 2\right) = 2\left(\frac{4-1}{2} + 2\right)$

$X(0) = 7$

3. $2 = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,d\nu$

4. $E_x = 2\left(\int_1^2 t^2\,dt + \int_2^3 2^2\,dt\right)$

$E_x = 2\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 + 4\right)$

$= 2\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 4\right)$

$= 12 + \frac{2}{3}$

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\,d\nu$

5. $y(t) = x(t+1)$

le graphe du signal est déplacé vers la gauche, du coup l'axe de symétrie tombe sur t=0

$y(-t) = y(t)$ donc $y(t)$ est pair $\qquad S_5$, corr 4

$y(t)$ est réel. Alors $Y(\nu) \in \mathbb{R}$

$\arg(Y(\nu)) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$X(\nu) = Y(\nu) e^{-2i\pi\nu}$

$x(t) = y(t-1)$

donc $\arg(X(\nu)) = -2\pi\nu + k\pi$

6. $\mathrm{Re}(X(\nu)) = \frac{1}{2}X(\nu) + \frac{1}{2}X(\nu)^*$

$= \frac{1}{2} Y(\nu) e^{-2i\pi\nu} + \frac{1}{2} \underbrace{Y(\nu)^*}_{\text{réel } = Y(\nu)} e^{2i\pi\nu}$

$= \frac{1}{2} Y(\nu) e^{-2i\pi\nu} + \frac{1}{2} Y(\nu) e^{2i\pi\nu}$

$= \frac{1}{2} TF[y(t-1)] + \frac{1}{2} TF[y(t+1)]$

$= TF\left[\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t+2)\right]$

7. $X(\nu)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{2i\pi\nu t} dt$

$t' = -t \qquad dt' = -dt$

$X(\nu)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t') e^{-2i\pi\nu t'} dt$

Donc $\mathrm{Re}(X(\nu)) = TF\left[\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t)\right]$

8. Pour cette figure, $\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t+2)$

$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t)$

en effet $t = 1$ est un axe de symétrie $x(1+t) = x(1-t)$ pour $t \in \mathbb{R}$

avec le changement de variable $t = 1+\tau$, on a $x(1+1+\tau) = x(2+\tau) =$

$x(1-(1+\tau)) = x(-\tau)$

S_2, corr 5