S5, C1

Séance 5

Cours

① Propriété de la TF concernant la dérivation

$$TF\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = (2i\pi\nu)^n \, TF\left[x(t)\right]$$

$$TF^{-1}\left[\frac{d^n}{d\nu^n}X(\nu)\right] = (-2i\pi t)^n \, TF^{-1}\left[X(\nu)\right]$$

Ainsi dériver un signal, c'est multiplier par $2i\pi\nu$ et l'intégrer c'est diviser par $2i\pi\nu$

Dériver un spectre par rapport à la fréquence c'est multiplier par $-2i\pi t$ le signal. Intégrer le spectre c'est diviser par $-2i\pi t$.

Dériver $\longleftrightarrow$ multiplier $\pm 2i\pi\nu/t$

Intégrer $\longleftrightarrow$ diviser par $\pm 2i\pi\nu/t$

$$TF[\delta(t)] = 1.$$

Exemple $TF[H(t)] = \frac{1}{2i\pi\nu}$ Pb: quel est le sens?

$$TF[t\,H(t)] = \frac{1}{(2i\pi\nu)^2}$$

Ceci devrait permettre de remplacer l'utilisation de l'intégration par partie.

Pour l'intégration, il peut y avoir une constante.

Justification :

pour $n = 1$

$$TF\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-2i\pi\nu t} dt$$

intégration par partie

$$= \left[x(t) e^{-2i\pi\nu t} \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (= 0)$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-2i\pi\nu) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$$= 2i\pi\nu \; TF[x(t)]$$

Le raisonnement par récurrence permet de généraliser à n.

$$TF^{-1}\left[\frac{d}{d\nu} X(\nu)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\nu} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

$$= \left[X(\nu) e^{2i\pi\nu t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \, 2i\pi t \, e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

$$= 0 - (2i\pi t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2i\pi\nu t}$$

$$= -(2i\pi t) \; TF^{-1}[X(\nu)]$$

De même on généralise par récurrence

② De nouvelles distributions

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t-a) f(t) dt = f^{(n)}(a) (-1)^n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)$$

$\delta(t)$ est pair, $\delta'(t)$ est impair, $\delta''(t)$ est pair

* $\int_{-\infty}^{+\infty} vp\left(\frac{1}{t}\right) t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

$vp\left(\frac{1}{t}\right)$ est impaire.

Calcul avec ces distributions

. $TF[1] = \delta[\nu]$ $\quad TF^{-1}[1] = \delta(t)$

En effet $TF^{-1}[\delta(\nu)] = 1$ et $TF[\delta(t)] = 1$

* $TF[\delta(t)] = 1$ $\quad TF^{-1}[\delta(\nu)] = 1$

* $TF[\delta'(t)] = 2i\pi\nu$ $\quad TF^{-1}[\delta'(\nu)] = -2i\pi t$

En effet $TF[\delta'(t)] = TF\left[\frac{d}{dt}\delta(t)\right] =$

$2i\pi\nu\, TF[\delta(t)] = 2i\pi\nu$

et $TF^{-1}[\delta'(\nu)] = -2i\pi t\, TF^{-1}[\delta(\nu)] = -2i\pi t$

* $TF[\delta''(t)] = (2i\pi\nu)^2$ $\quad TF^{-1}[\delta''(\nu)] = (-2i\pi t)^2$

* $TF[H(t)] = \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta(\nu)$

En effet $TF\left[\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau + ct\right] = \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right) TF[\delta(t)]$

de plus, $H(t) - \frac{1}{2}$ est impair donc $ct = -\frac{1}{2}$

$TF\left[+\frac{1}{2}\right] = +\frac{1}{2}\delta(\nu)$

donc $TF[H(t)] = \frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right)$

* $TF^{-1}[H(\nu)] = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right)$

En effet, $TF^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\nu} \delta(\rho)d\rho + ct\right] = \frac{1}{-2i\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right) TF^{-1}[\delta(\nu)]$

$H(\nu) - \frac{1}{2}$ est impair

donc $TF^{-1}\left[H(\nu) - \frac{1}{2}\right] = \frac{-1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right)$

$TF^{-1}[H(\nu)] = \frac{\delta(t)}{2} - \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right)$

$\ast\ TF\left[vp\left(\frac{1}{t}\right)\right] = i\pi - 2i\pi H(\nu)$

En effet, $TF\left[vp\left(\frac{1}{t}\right)\right] = TF\left[\frac{-1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right)\right] \times (-2i\pi)$

$$= (-2i\pi) \times \left(\int_{-\infty}^{\nu} \delta(f)\,df + ct\right)$$

$$= (-2i\pi)\left(H(\nu) + ct\right)$$

$H(\nu) - \frac{1}{2}$ est impair

donc $TF\left[vp\left(\frac{1}{t}\right)\right] = -2i\pi\left(H(\nu) - \frac{1}{2}\right)$

$$= i\pi - 2i\pi H(\nu).$$

$\ast\ TF^{-1}\left[vp\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = 2i\pi H(t) - i\pi$

En effet, $TF^{-1}\left[vp\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = 2i\pi\, TF^{-1}\left[\frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]$

$$= 2i\pi\left(\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau + ct\right)$$

$$= 2i\pi\left(H(t) + ct\right)$$

$H(t) - \frac{1}{2}$ est impair donc $ct = -\frac{1}{2}$

$$= -i\pi + 2i\pi H(t).$$

③ Transformées de Fourier et retards

Si $y(t) = x(t-\tau)$

alors $Y(\nu) = X(\nu)\, e^{-2i\pi\nu\tau}$

$$|Y(\nu)| = |X(\nu)|$$

<u>application</u>:

Calcul de la TF de 

$x(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]}(t) + 2\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]}(t)$

$TF\left[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)\right] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$

$TF\left[\mathbb{1}_{[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]}(t)\right] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times e^{2i\pi\nu}$

$$TF\left[1_{[1/2,\,3/2]}(t)\right] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{-2i\pi\nu}$$ S5, C5

Donc $$TF[x(t)] = \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}\left[2 + e^{-2i\pi\nu} + e^{2i\pi\nu}\right].$$

$$= \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}\left(e^{i\pi\nu} + e^{-i\pi\nu}\right)^2$$

$$= \frac{4\sin\pi\nu}{\pi\nu}\cos^2\pi\nu$$

<u>Justification</u>:

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, e^{-2i\pi\nu(t-\tau)}\, e^{-2i\pi\nu\tau}\, dt$$

$t' = t-\tau \qquad dt' = dt$

$$Y(\nu) = e^{-2i\pi\nu\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-2i\pi\nu t'}\, dt'$$

$$Y(\nu) = X(\nu)\, e^{-2i\pi\nu\tau}$$

4 Modulation et transformée de Fourier

Si $y(t) = x(t)\, e^{i\omega_0 t}$

alors $Y(\nu) = X\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right)$

<u>application</u>:

calcul de la transformée de Fourier d'une sinusoïde tronquée

$$x(t) = 1_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$X(\nu) = \frac{1}{2} TF\left[1_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t) \times e^{i2\pi f_0 t}\right] + \frac{1}{2} TF\left[1_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t)\, e^{i2\pi f_0 t}\right]$$

55,66

$$X(\nu) = \frac{1}{2} T \frac{\sin \pi(\nu - f_0)T}{\pi(\nu - f_0)T} + \frac{1}{2} T \frac{\sin \pi(\nu + f_0)T}{\pi(\nu + f_0)T}$$

Justification

$$y(t) = x(t)\, e^{i\omega_0 t}$$

$$Y(\nu) = TF[x(t) e^{i\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi})t}\, dt$$

$$Y(\nu) = X\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right)$$

⑤ Dilatation de l'échelle des temps

$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$ alors $Y(\nu) = a X(a\nu)$

application :

$$TF\left[1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t)\right] = TF\left[1_{[-1/2, 1/2]}\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$= T \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Le lobe principal est passé d'une largeur de 2 à $\frac{2}{T}$, les autres de 1 à $\frac{1}{T}$.

justification :

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$t' = \frac{t}{a} \qquad dt' = \frac{dt}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-2i\pi\nu a t'}\, a\, dt'$$

$$= a X(a\nu)$$