exercice 1

On considère le signal $x(t) = e^{-t/2} \mathbb{1}_{[0,2]}(t)$ périodique de période 2. Les coefficients de série de Fourier sont

$$c_n = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi n}.$$

1. On considère $S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n$, montrez que $S_N = (1-e^{-1})\left[1 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}\right]$

2. Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-e}{e-1}\right)$, montrez que S_N tend vers $\frac{1}{2}(1+e^{-1})$ quand $N \to +\infty$.

3. Montrez que $\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1+e^{-1})$

4. Expliquez pourquoi

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t)$$

exercice 2

On considère le signal $x(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrez que $X(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ est sa transformée de Fourier.

exercice 3

on considère le signal

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Montrez que

$$X(\nu) = e^{-\pi \nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi (t + i\nu)^2} dt$$

2. Montrez que

$$X(\nu) = e^{-\pi \nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$$

3. Sachant que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$,

montrez que $X(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$

exercice 4

on considère le signal $x(t) = e^{-\pi t^2}$ dont la transformée de Fourier est $X(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$

1. On définit la largeur à mi-hauteur du spectre

$$\Delta\nu_x = \nu_2 - \nu_1 \quad \text{où} \quad |X(\nu_2)| = |X(\nu_1)| = \frac{1}{2} \max_\nu |X(\nu)|$$

Montrez que $\Delta\nu_x = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}$

2. On définit la largeur à mi-hauteur de la densité spectrale

$$\Delta\nu_0 = \nu_2 - \nu_1 \quad \text{où} \quad |X(\nu_2)|^2 = |X(\nu_1)|^2 = \frac{1}{2} \max_\nu |X(\nu)|^2$$

Montrez que $\Delta\nu_0 = \sqrt{\frac{2\ln 2}{\pi}}$.

3. On définit la largeur à mi-hauteur de la puissance instantanée

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 \quad \text{où } |x(t_2)|^2 = |x(t_1)|^2$$
$$= \frac{1}{2} \max_t |x(t)|^2$$

Montrez que $\Delta \nu_0 \, \Delta t_0 = \frac{2 \ln 2}{\pi}$

4. On définit $\Delta \omega_0 = 2\pi \Delta \nu_0$

Calculez $\Delta \omega_0 \Delta t_0$

<u>exercices</u>

On considère le signal

$$x(t) = H(t) \, e^{-2\pi t}$$
avec $H(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

1. Montrez que $X(\nu) = \frac{1}{2\pi(1 + i\nu)}$

2. En utilisant $x(t)$, montrez que $E_x = \frac{1}{4\pi}$

3. En utilisant $X(\nu)$ montrez que $E_x = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2}$

4. Déduisez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

S_4, E_4

<u>exercice 6</u>

On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\, t\, e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$

on remarque qu'une primitive

de $t e^{-\frac{2t^2}{\alpha^2}}$ est $-\frac{\alpha^2}{4} e^{-\frac{2t^2}{\alpha^2}}$

En utilisant une intégration

par partie, montrez que

$$E_{x_\alpha} = \frac{e\, \alpha^3 \sqrt{2\pi}}{8}$$