Séance 4
Cours

① Transformée de Fourier

aussi appelée transformée de Fourier à temps continu.

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = TF[x(t)]$$

t : temps (s)
ν : fréquence (Hz)
$x(t)$ est réel ou complexe
$X(\nu)$ est généralement complexe
$x(t)$ est non-périodique.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = TF^{-1}[X(\nu)]$$

<u>exemple</u>

$x(t) = \Pi(t) = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(t)$	$X(\nu) = \dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$
$x(t) = e^{-\pi t^2}$	$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$
$x(t) = \delta(t)$	$X(\nu) = 1$

② Lien avec les séries de Fourier

* Etant donné X_k et $\nu_k = \frac{k}{T}$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

$$TF^{-1}[X(\nu)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{2i\pi\frac{k}{T}} = x(t).$$

La transformée inverse coïncide avec la série de Fourier.
Des raies donnent lieu à un signal périodique.

S4, C2

* Etant donné $x(t)$ périodique de période T

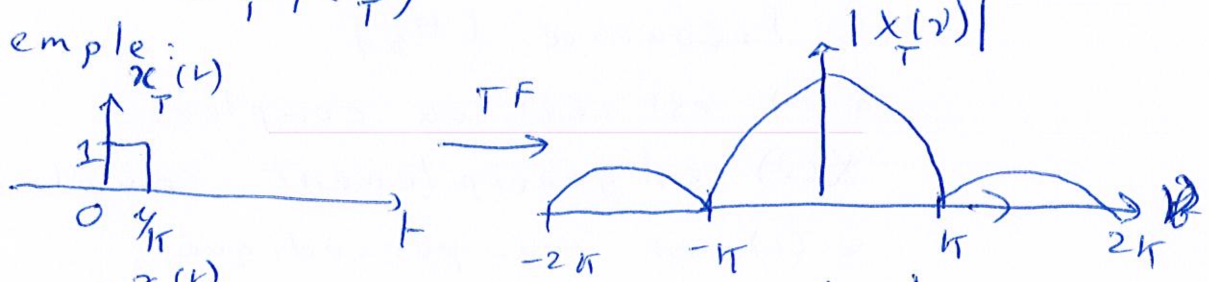
$$x_T(t) = x(t)\,\mathbb{1}_{[0,T]}(t)$$

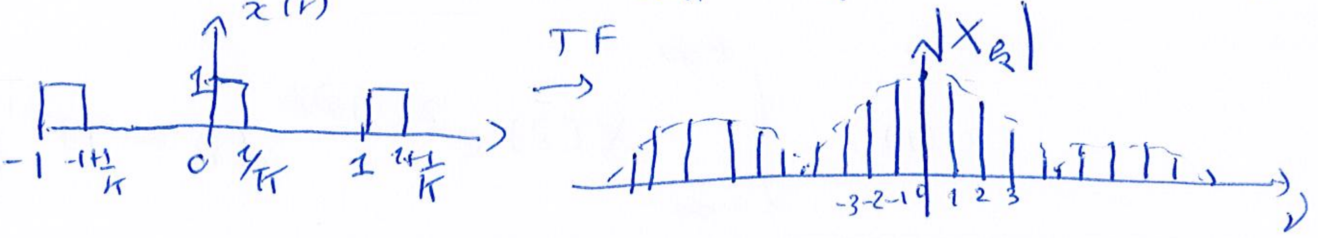
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$$

$$X(\nu) = \underbrace{X_T(\nu)}_{\text{transformée de Fourier de } x_T(t)} \underbrace{\left(\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)\right)}_{\text{appelé peigne de Diracs.}}$$

$$X_k = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right)$$

exemple :





Les raies du signal périodique coïncident à un coefficient de proportionnalité avec la TF du motif.

peigne de Dirac

$$\text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$\frac{1}{T}\text{Ш}_{1/T}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

③ Egalité de Plancherel

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

Justification:

on définit un produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt$$

on démontre que

$$\langle TF[x(t)], Y(\nu) \rangle = \langle x(t), TF^*[Y(\nu)] \rangle$$

en effet: $\langle TF[x(t)], Y(\nu) \rangle =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \right) Y(\nu)^* d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \right)^* dt$$

$$= \langle x(t), TF^*[Y(\nu)] \rangle$$

Et finalement

$$E = \langle X(\nu), X(\nu) \rangle = \langle TF[x(t)], X(\nu) \rangle$$

$$= \langle x(t), TF^{-1}[X(\nu)] \rangle$$

$$= \langle x(t), x(t) \rangle = E$$

④ Valeurs en zéro

On applique les transformées de Fourier à $t=0$ et $\nu=0$

$$x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,d\nu$$

$$X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$$

⑤ Linéarité

Si $z(t)=x(t)+y(t)$
alors $Z(\nu)=X(\nu)+Y(\nu)$
Si $z(t)=\alpha x(t)$
alors $Z(\nu)=\alpha X(\nu)$

⑥ Parité

* $x(t)$ pair alors $X(\nu)$ pair
* $x(t)$ impair alors $X(\nu)$ impair
* $x(t)$ réel et pair alors $X(\nu)$ est réel
* $x(t)$ réel et impair alors $X(\nu)$ est imaginaire
* $x(t)$ réel $\Leftrightarrow$ $|X(\nu)|$ symétrique (pair)
* $x(t)$ réel $\Leftrightarrow$ $\arg(X(\nu))$ impair à π près.

On a aussi si $x(t)$ réel alors $TF[x(-t)]=X(\nu)^*$

En effet:

$$TF[x(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-2i\pi\nu t}\,dt$$

chg de var: $t'=-t$

$$TF[x(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2i\pi\nu t}\,dt=\left(TF[x(t)]\right)^*$$

* $x(t)$ réel et pair

alors $X^*(\nu) = TF[x(-t)] = TF[x(t)] = X(\nu)$

donc $X(\nu)$ réel $\left(X^*(\nu) - X(\nu) = 0 \right) = \mathrm{Im}(X(\nu))$

* $x(t)$ réel et impair

alors $X^*(\nu) = TF[x(-t)] = TF[x(t)] = -X(\nu)$

$\mathrm{Re}(X(\nu)) = \frac{1}{2} X(\nu) + \frac{1}{2} X(\nu)^* = 0$

* $x(t)$ réel

alors $|X(-\nu)| = |X(\nu)^*| = |X(\nu)|$

donc $|X(\nu)|$ est pair

* $x(t)$ réel

alors $\arg(X(-\nu)) = \arg(X(+\nu)^*)$

$= -\arg(X(\nu))$

donc $\arg(X(\nu))$ est impair à π près.

* $x(t)$ complexe et $x(t)$ pair

alors $X(\nu)$ pair

$$X(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi(-\nu)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t') e^{-2i\pi\nu t'} dt' \quad t' = -t.$$

$$= X(\nu)$$

* $x(t)$ complexe et $x(t)$ impair

alors $X(\nu)$ impair.