exercice 1

On considère un signal x_α périodique de période 1.

$x_\alpha(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]}(t)$ pour $t \in [-1/2, 1/2[$

$\alpha \in]0,1[$.

1. À quelles fréquences correspondent les coefficients c_n de la série de Fourier?

2. Sachant que $x_\alpha(t)$ est pair, que sait-on sur c_n ?

3. Quelle est la valeur moyenne de $x_\alpha(t)$, qu'est-ce que cela nous apprend sur c_0 ?

4. Calculez c_n et montrez que

$$c_n = \alpha \operatorname{sinc}(\pi n \alpha)$$

5. Calculez la puissance, P_x

6. On souhaite que la relation entre la valeur moyenne et la puissance soit la même que pour une sinusoïde à valeurs positives, c'est-à-dire $y(t) = 1 + \cos t$ pour laquelle $P_y = \frac{3}{2}\langle y \rangle^2$. Montrez cette relation et prouvez que $\alpha = \frac{2}{3}$

S3, ex 2

7. En utilisant $\alpha = \frac{2}{3}$, on considère $\hat{x}(t)$ formé de la composante continue et de la première harmonique.

Montrez que $\hat{x}(t) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\pi} e^{2i\pi t}$

8. Montrez que

$$P_{\hat{x}} = \frac{4}{9} + \frac{3}{4\pi^2}$$

Indication : vous pourez utiliser le fait que les signaux $t \mapsto e^{2i\pi t}$ et $t \mapsto 1$ sont orthonormés.

exercice 2

On considère un signal périodique de période 2, noté $x(t)$ et défini par

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[.$$

1. À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier c_n
2. Calculez les coefficients c_n et montrez que
$$c_n = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi n}$$
3. En utilisant $x(t)$, calculez la puissance et montrez que
$$P_x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

4. En utilisant les coefficients c_n, montrez que

$$P_x = (1-e^{-1})^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$$

5. En comparant les deux expressions de P_x, montrez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-e}{e-1}\right)$$

<u>exercice 3</u>

On considère $x(t) = e^{-t/2} u_{[0,2]}(t)$ périodique de période 2. Les coefficients de la série de Fourier sont $c_n = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi n}$

1. Montrez que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi n} (-1)^n = e^{-1/2}$$

2. Montrez que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{e}}{e-1}\right)$$

S3, E4

exercice 4

on considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\, t\, e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Donnez le tableau de variation de $x_\alpha(t)$.

   On appelle $t_{max} = \arg\max_{t \in \mathbb{R}} x_\alpha(t)$

   $t_{min} = \arg\min_{t \in \mathbb{R}} x_\alpha(t)$

   Cela signifie que

   $x_\alpha(t_{min}) \leq x_\alpha(t) \leq x_\alpha(t_{max})$

   Indication : Etudiez le signe de la dérivée de $x_\alpha(t)$ en fonction de t.

   Montrez que $x(t)$ est impair.

2. Tracez la courbe représentative de $x_\alpha(t)$.