S3, corr 1

exercice 1

1. $f_k = k \in \mathbb{Z}$

2. $x_\alpha(t)$ est pair aussi c_n est réel

$$Im(c_n) = Im\left[\int_{-1/2}^{1/2} x_\alpha(t) e^{-2i\pi n t} dt\right]$$

$$= -\underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} x_\alpha(t) \underbrace{\sin(2i\pi n t)}_{\text{impair}}}_{\text{impair}} dt = 0.$$

3. $\langle x_\alpha(t) \rangle = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} x_\alpha(t) dt = \alpha$

donc $c_0 = \alpha$

4. $c_n = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} x_\alpha(t) e^{-2i\pi n t} dt = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} e^{-2i\pi n t} dt$

$$c_n = \left[\frac{e^{-2i\pi n t}}{-2i\pi n}\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{e^{i\pi n \alpha} - e^{-i\pi n\alpha}}{2i\pi n}$$

$c_n = \alpha \, \mathrm{Sinc}(\pi n \alpha)$

5. $P_x = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} (x_\alpha(t))^2 dt = \alpha \quad \left(= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} dt\right)$

6. $y(t) = 1 + \cos t$ est périodique de période 2π. Aussi $\langle y \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t) dt$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi_2}^{\pi_2} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi_2}^{\pi_2} \cos t \, dt$$

$$\langle y \rangle = 1 + \frac{1}{2\pi}\left[\sin t\right]_{-\pi_2}^{\pi_2} = 1.$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi_2}^{\pi_2} (1+\cos t)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi_2}^{\pi_2} (1 + 2\cos t + \cos^2 t) \, dt$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi_2}^{\pi_2} \left(\frac{3}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$P_y = \frac{3}{2} + \frac{2}{2\pi}\left[\sin t\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{2}.$$

Cela confirme ici que $P_y = \frac{3}{2}\langle y \rangle^2$

En appliquant cette relation à $x_\alpha(t)$ on trouve $\alpha = \frac{3}{2}\alpha^2$

Comme $\alpha \in]0,1[$, on trouve $\alpha = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

7. $\hat{x}(t)$ est la projection de $x(t)$ sur $e_0(t) = 1$ et $e_1(t) = e^{2i\pi t}$

$$\hat{x}(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t)$$

$$\hat{x}(t) = \alpha + \alpha \, \underline{\mathrm{sinc}(\pi\alpha)} \, e^{2i\pi t}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{2}{3} + \frac{\sin(\pi\frac{2}{3})}{\pi} e^{2i\pi t}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\pi} e^{2i\pi t}$$

8. $e_0(t)$ et $e_1(t)$ sont orthonormés pour la puissance.

Aussi $P_{\hat{x}} = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle =$

$\langle c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t), c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) \rangle$

$= |c_0|^2 + |c_1|^2$

$= \alpha^2 + (\alpha \operatorname{sinc}(\pi\alpha))^2$

$= \frac{4}{9} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{3}{2} \frac{\times 1}{\pi^2}$.

<u>exercice 2</u>

1. Chaque coefficient c_n est associé à la fréquence $\frac{n}{2}$, parce que 2 est la période du signal.

2. Le signal est de période 2, donc

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-2i\pi \frac{n}{2} t} dt$$

On aurait pu écrire aussi

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x(t) e^{-2i\pi \frac{n}{2} t} dt$$

parce que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne change pas quand on la décale.

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-\frac{t}{2} - i\pi n t}\,dt$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-\frac{t}{2} - i\pi n t}}{-\frac{1}{2} - i\pi n}\right]_0^2$$

$$c_n = \frac{1}{2}\,\frac{1 - e^{-\frac{2}{2} - i\pi n 2}}{\frac{1}{2} + i\pi n}$$

Il se trouve que $e^{-2i\pi n} = 1$

Donc $c_n = \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-1}}{\frac{1}{2}+i\pi n} = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi n}$.

3. $x(t)$ est périodique de période 2

Donc $P_x = \frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt$

$$P_x = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_0^2$$

$$P_x = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$$

4. La relation de Parseval montre que

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

or $|c_n|^2 = \frac{|1-e^{-1}|^2}{|1+2i\pi n|^2} = \frac{(1-e^{-1})^2}{1+4\pi^2 n^2}$

Donc $P_x = (1-e^{-1})^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$

5. Avec les deux expressions de P_x, on a

$$\frac{1}{2}(1-e^{-2}) = P_x = (1-e^{-1})^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$$

Donc $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-e^{-2})}{(1-e^{-1})^2} = \frac{(1-e^{-1})(1+e^{-1})}{2(1-e^{-1})(1-e^{-1})}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{2}\frac{e+1}{e-1}$$

De plus $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2}}_{\text{identique}}$$

Donc $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} - 1\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{e+1}{e-1} - 1\right) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{e-1}\left[e+1-2e+2\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-e}{e-1}\right)$$

exercice 3

1. $x(t)$ est à variation borné et est continu en $t=1$, donc

$$S'_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i2i\pi\frac{n}{2}\times 1} \xrightarrow[\text{quand } N\to+\infty]{} x(1) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$S'_N = \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n \frac{(1-e^{-1})}{1+2i\pi n} \xrightarrow[\text{quand } N\to+\infty]{} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n(1-e^{-1})}{1+2i\pi n}}_{} = e^{-1/2}.$$

cette série converge car $0 \leq Re\left(\frac{1}{1+2i\pi n}\right) \to 0$ qd $n\to+\infty$ et $0 \geq Im\left(\frac{1}{1+2i\pi n}\right) \to 0$ qd $n\to+\infty$

$$2.\quad \frac{e^{-1/2}}{1-e^{-1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2i\pi n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{1+2i\pi n} + \frac{1}{1-2i\pi n} \right]$$

$$\frac{\sqrt{e}}{e-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \frac{2}{1+4\pi^2 n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{e-1} - 1 \right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{e}}{e-1} \right)$$

<u>exercice 4</u>

$$1.\ \frac{d}{dt} x_\alpha(t) = \sqrt{e}\left(e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} + t \times \left(\frac{-2t}{\alpha^2}\right) e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} x_\alpha(t) = \sqrt{e}\, e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \left(1 - \frac{2t^2}{\alpha^2} \right)$$

$1 - 2\frac{t^2}{\alpha^2} = 0$ a 2 racines $t = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ et $t = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.

t	$-\infty$	$-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
	0 $\searrow$	$-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ $\nearrow$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ $\searrow$	0

$$x_\alpha\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{e}\, e^{-\frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2}{\alpha^2}} \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{e}\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$x_\alpha\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

$x_\alpha(t)$ est impair. $x_\alpha(-t) = \sqrt{e}\, e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}(-t)$
$= -x_\alpha(t)$.

$t_{min} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $t_{max} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.

S3, corr 7

exercice 4

2.

$x_\alpha(t)$.