Série de Fourier

Remarque : les démonstrations ne sont pas du tout à connaître elles ne font pas parti du cours.

① Base orthonormée pour les fonctions périodiques de période T avec $\langle x,y\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, y(t)^* \, dt$

$$e_n(t) = e^{2i\pi \frac{n}{T} t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Un signal $x(t)$ a pour composantes

$$c_n = \langle x(t), e_n(t) \rangle$$

Et $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e_n(t)$

② Transformée de Fourier des signaux T-périodiques

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-2i\pi \frac{k t}{T}} dt$$

$$TF[x(t)] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \, \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

définition $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,\delta(\nu-\nu_0)\,d\nu = X(\nu_0)\right)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2i\pi \frac{k t}{T}}$$

Les fréquences de X_k sont $f_k = \frac{k}{T}$.

$x(t)$ périodique $\Rightarrow X(\nu)$ a des raies

③ Egalité de Parseval

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

En effet $P_x = \langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e_k , \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} X_\ell e_\ell \rangle$

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} X_k X_\ell^* \langle e_k, e_\ell \rangle$$

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \langle e_k, e_k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2.$$

④ Convergence de la série de Fourier

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{2i\pi \frac{kt}{T}}$$

- Si $x(t)$ est continu alors
  $x_N(t) \to x(t)$ quand $N \to +\infty$
- Si $x(t)$ est à variation borné alors $x_N(t) \to \frac{1}{2}x(t^+) + \frac{1}{2}x(t^-)$ quand $N \to +\infty$

$$x(t_0^+) = \lim_{\substack{t \to t_0^+ \\ t > t_0}} x(t)$$

$$x(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} x(t)$$

5 Valeurs en zéro

$$x(0) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} X_k$$
$$\left(\text{ou } \tfrac{1}{2} x(0^+) + \tfrac{1}{2} x(0^-)\right)$$

Valeur en zéro de la série de Fourier

$$X_0 = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

6 Parité

a. $x(t)$ réel et pair alors X_k réel

b. $x(t)$ réel et impair alors X_k imaginaire

c. $x(t)$ réel alors $|X_k|$ est pair
et $\arg(X_k)$ est impair.

a. $$X_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t) e^{-2i\pi \frac{kt}{T}} dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} x(t) e^{-2i\pi \frac{kt}{T}} dt$$

changement de variable $t' = -t$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t) e^{-2i\pi \frac{kt}{T}} dt + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(-t) e^{2i\pi \frac{kt}{T}} dt$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t) \cos\left(2\pi \frac{kt}{T}\right) dt \in \mathbb{R}.$$

b. $$X_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t) \left[e^{-2i\pi \frac{kt}{T}} - e^{+2i\pi \frac{kt}{T}} \right] dt$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)\,(-2i) \sin \frac{kt}{T}\, dt \in i\mathbb{R}.$$

c. $$X_{-k} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{2i\pi \frac{kt}{T}} dt = X_k^*$$

$$|X_{-k}|^2 = |X_k^*|^2 = |X_k|^2 \quad \text{et} \quad \arg(X_{-k}) = \arg(X_k^*) = -\arg(X_k)$$

7 Propriété des signaux périodiques.

* $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-kT)$$

avec $x_T(t) = x(t)\, \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$

en effet

$$x(t-T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t-kT-T)$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x_T(t-k'T) = x(t).$$

$k' = k+1$

et $x(t) = x_T(t)$ pour $t \in [0,T]$

* $x(0^-) = x(T^-)$

en effet $x(t) = x(t+T)$

donc $\lim_{t \to 0^-} x(t) = \lim_{t \to T^-} x(t)$

* $$\int_0^T x(t)\,dt = \int_a^{a+T} x(t)\,dt$$

en effet

$$\int_0^T x(t)\,dt = \int_0^a x(t)\,dt + \int_a^{a+T} x(t)\,dt$$

$$- \int_T^{a+T} x(t)\,dt$$

or $$\int_T^{a+T} x(t)\,dt = \int_0^a x(t')\,dt'$$

avec $t' = t+T$.

(8) Propriété des séries. S3,C5

*
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ----$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2. ---$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ----$

$\mathbb{Z}^* = \{1, -1, 2, -2, -----$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = 0\}.$

$\mathbb{R}_* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha \leq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

En effet, si $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha} > 0$ et majoré par $\int_{t-1}^{t} \frac{dt}{t^\alpha}$

donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ est croissante

et majorée par $1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{1-\alpha}$

Si $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha}$ est minoré par $\int_t^{t+1} \frac{dt}{t^\alpha}$

donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \to +\infty & \text{si } \alpha < 1. \\ \ln(N+1) \to +\infty. & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

* $\sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{i\theta n}$ converge si s_n décroissante et $s_n \to 0$.

en effet $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

d'où $e^{in\theta} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}$

$= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

$$\sum_{n=1}^{N} S_n e^{i\theta n} = \sum_{n=1}^{N} S_n \frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} - \sum_{n=1}^{N} S_n \frac{1-e^{i\theta n}}{1-e^{i\theta}}$$

on échange les indices $n \mapsto n+1$.

$$= \sum_{n=1}^{N} S_n \frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} - \sum_{n=0}^{N-1} S_{n+1} \frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$$

on étend S_n avec $S_0 = 0$.

$$\sum_{n=1}^{N} S_n e^{i\theta n} = \underbrace{S_N \frac{1-e^{i\theta(N+1)}}{1-e^{i\theta}}}_{\to 0 \text{ qd } N \to +\infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} (S_n - S_{n+1})\left(\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}\right)}_{\text{cette série converge car}}$$

$$\left|(S_n - S_{n+1})\left(\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}\right)\right| \leq \frac{2(S_n - S_{n+1})}{|1-e^{i\theta}|}$$

et $\sum_{n=0}^{N-1} (S_n - S_{n+1}) = S_0 - S_N \to S_0$.

Donc la série converge.