Séance 2 Exercices

(Des solutions sont données à la fin).

exercice 1

On considère $x_n(t) = (it)^n \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$

1. Calculez $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t)\,dt$

2. Calculez la moyenne temporelle

$$\langle t_n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|x_n(t)|\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)|\,dt}$$

3. Calculez l'énergie moyenne

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^2(t)\,dt$$

4. Calculez la puissance moyenne

$$P_n = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_n|^2(t)\,dt$$

exercice 2

On considère ici des signaux périodiques de période 1.

1. Montrez que $e_1(t) = \Pi(t)$ et $e_2(t) = \text{sign}(t)\Pi(t)$ sont orthogonaux pour la puissance

2. Montrez qu'ils sont de norme 1

3. Trouvez α et β tel que $x(t) = t\,\mathbb{1}_{[0,1/2]}(t)$ soit le mieux possible approché par $\alpha\Pi(t) + \beta e_2(t)$

4. Calculez $P_{x(t) - \alpha e_1(t) - \beta e_2(t)}$

exercice 3

1. Montrez que $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ est une fonction holomorphe sauf en $z=i$ et $z=-i$

2. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$

Montrez que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(t+\frac{i}{2}\right)^2} = \pi$

exercice 4

1. Calculez l'énergie de

$$x_1(t) = e^{-\pi t^2} e^{it}$$

Montrez que $E_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Indication $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\,\sigma$

2. Calculez l'énergie de

$$x_2(t) = e^{-\pi t^2} \cos t$$

Montrez que $E_{x_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2\pi}}\right)$

Indication : $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Re\left(e^{2it}\right)$

Solution de l'exercice 1

1. $I_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } n = 4k \\ 0 & \text{si } n = 4k+1 \\ \frac{-2}{n+1} & \text{si } n = 4k+2 \\ 0 & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$

2. $\langle t_n \rangle = 0$

S2, Ex3

3. $E_n = \frac{2}{2n+1}$

4. $P = 0$

Solution de
l'exercice 2

3. $\alpha = 1/8$, $\beta = 1/8$

L'approximation $\hat{x}(t) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } t \in]0, 1/2] \\ -1/8 & \text{si } t \in [-1/2, 0[\end{cases}$

4. $P_{x-\hat{x}} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{128}\left(1 + \frac{7}{6}\right)$