Séance 2 Corrigé exercices

exercice 1

1. $I_n = \int_{-1}^{+1} (it)^n dt = i^n \int_{-1}^{+1} t^n dt = i^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{1}$

$I_n = \frac{i^n}{n+1} \left(1 - (-1)^{n+1} \right)$

$$I_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } n = 4k \\ 0 & \text{si } n = 4k+1 \\ -\frac{2}{n+1} & \text{si } n = 4k+2 \\ 0 & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

$$\langle t_n \rangle = \frac{\int_{-1}^{1} t\,|(it)^n|\,dt}{\int_{-1}^{1} |(it)^n|\,dt}$$

$$\langle t_n \rangle = \frac{\int_{-1}^{1} t\,|t|^n\,dt}{\int_{-1}^{1} |t|^n\,dt}$$

$t \mapsto t|t|^n$ est impair

$t \mapsto |t|^n$ est pair

$$\langle t_n \rangle = \frac{0}{2\int_0^1 t^n\,dt} = 0$$

3. $E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)|^2 dt = \int_{-1}^{1} |(i\,t)^n|^2 dt$

$$E_n = \int_{-1}^{1} t^{2n} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^{1}$$

$$E_n = \frac{1 - (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

4. $0 \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_n(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-1}^{1} |i\,t|^{2n} dt \leq \frac{2}{T}$

pour $T > 2$

Quand $T \to +\infty$, $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_n(t)|^2 dt \to 0$

donc $P = 0$.

<u>exercice 2</u>

1. $P_{e_1,e_2} = \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} e_1(t)\, e_2(t)\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(t) \big(\mathbb{1}_{]0, 1/2]}(t)$

$- \mathbb{1}_{[-1/2, 0[}(t) \big)\, dt = \int_{0}^{1/2} \mathbb{1}_{[0, 1/2]}(t)\, \mathbb{1}_{]0, 1/2]}(t)$

$- \int_{-1/2}^{0} \mathbb{1}_{[-1/2, 0]}\, \mathbb{1}_{[-1/2, 0[}(t)\, dt = 1/2 - 1/2.$

autre possibilité :

$e_1(t)\, e_2(t)$ est impair car $e_1(-t)\, e_2(-t) = e_1(t)(-e_2(t))$

donc $P_{e_1,e_2} = 0$.

S_2, cas 3

2. $$P_{e_1} = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} e_1(t)^2\,dt \xrightarrow{e_1^2(t)\text{ est pair}} = 2\int_0^{1/2} 1\,dt = 1$$

$$P_{e_2} = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} e_2^2(t)\,dt \xrightarrow{e_2^2(t)\text{ est pair}} = 2\int_0^{1/2} 1 = 1.$$

3. $P_{e_1} = P_{e_2} = 1$ et $P_{e_1,e_2} = 0$

aussi

$\alpha = P_{x,e_1}$ et $\beta = P_{x,e_2}$

$$\alpha = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)\,e_1(t)\,dt \xrightarrow{\text{causal}} = \int_0^{1/2} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

$$\beta = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)\,e_2(t)\,dt = \int_0^{1/2} t\,dt = 1/8$$

Donc $\hat{x}(t) = \frac{1}{8}e_1(t) + \frac{1}{8}e_2(t)$ est une approximation de $x(t)$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{8}\,\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\,\left(1 + \text{sign}(t)\right)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1/8 & \text{si } t \in [-1/2, 0[\end{cases}$$ et $\hat{x}(t)$ est périodique

4. $$P_{x-\hat{x}} = \frac{1}{1}\int_{-1/2}^{1/2} \left(x(t) - \hat{x}(t)\right)^2 dt$$

$$P_{x-\hat{x}} = \int_{-1/2}^{0} \left(0 - (-1/8)\right)^2 dt + \int_0^{1/2} \left(t - 1/8\right)^2 dt$$

$$P_{x-\hat{x}} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\left(t - 1/8\right)^3\right]_0^{1/2} = \frac{1}{128} + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)^3 - \left(0-\frac{1}{8}\right)^3\right]$$

$$P_{x-\hat{x}} = \frac{1}{128} + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \frac{1}{8^3}\right] = \frac{1}{128} + \frac{1}{3}\times\frac{28}{8^3} = \frac{1}{128}\left(1 + \frac{7}{6}\right)$$

exercice 3

1. $z \mapsto z^2+1$ est holomorphe parce que c'est un polynôme.

$z^2+1=0 \iff z=i$ ou $z=-i$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe pour $z \neq 0$.

La composition de $z \mapsto z^2+1$ et $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sauf en $z=i$ ou $z=-i$

2. Je considère $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

f est holomorphe sur $|Im(z)| < 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

quand $|Im(z)| < 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{i}{2}\right)^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \pi$.

exercice 4

1. $E_{x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi 2 t^2} dt$

$E_{x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^2}} dt = \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $E_{x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi 2 t^2} \cos^2 t\,dt$

$E_{x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$

S2, corr 5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} \cos 2t \, dt = R_e\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2 + 2it} \, dt\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} \cos 2t \, dt = R_e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\left(t - \frac{i}{2\pi}\right)^2 - \frac{2\pi}{4\pi^2}} \, dt$$

$z \mapsto e^{-2\pi z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\left(t-\frac{i}{2\pi}\right)^2} dt = \int_{-\infty} e^{-2\pi t^2} dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} \cos 2t \, dt = R_e\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} dt\right) e^{-\frac{1}{2\pi}}$$

$$E_{\pi_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{-\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2\pi}}\right).$$