Séance 2
Cours

① Statistique d'ordre 1

* Intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$

* Valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$: $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$ si $x(t)$ est T-périodique

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \quad \text{sinon.}$$

* Moyenne temporelle $\langle t \rangle$: $\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\,x(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt}$ pour $x(t) \geq 0$

② Statistique d'ordre 2

* Energie $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$

Si $E_x < +\infty$, $x(t)$ est un signal d'énergie finie.

* Puissance $P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$ si $x(t)$ est periodique.

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$

* $E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$

$P_x > 0 \Rightarrow E_x = +\infty$.

$E_x = 0 \Rightarrow x(t)$ est presque partout nul

S2, C2

③ Produit scalaire

Cas de signaux de puissance finie (en général périodique)

$$\langle x(t), y(t)\rangle = P_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt \\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt \end{cases}$$

Cas de signaux d'énergie finie

$$\langle x(t), y(t)\rangle = E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

$\langle x(t), y(t)\rangle > 0$ interférences constructives

$\langle x(t), y(t)\rangle < 0$ interférences destructives

$\langle x(t), y(t)\rangle = 0$ signaux orthogonaux.

$\langle x(t), x(t)\rangle = 1$ signaux normés.

④ Approximation des fonctions.

$e_1(t) \dots e_n(t)$ signaux orthogonaux et normés

Alors $\hat{x}(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_m e_n(t)$ est une approximation de $x(t)$

$$\alpha_1 = \langle e_1(t), x(t)\rangle$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \langle e_m(t), x(t)\rangle$$

⑤ Complexe

$z = a + ib$ $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$z = \rho e^{i\theta}$ $\quad Re(z) = \rho\cos\theta$

$Im(z) = \rho\sin\theta$

$z = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta$

$|z| = \rho$

⑥ Intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

$x(t)$ est pair alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} x(t)\,dt$

$x(t)$ est impair alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 0$.

$x(t)$ est causal alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} x(t)\,dt$

⑦ Faire apparaître un terme carré

$$at^2 + bt + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - a\frac{b^2}{4a^2}$$

avec a, b et c pouvant être complexe.

⑧ Intégrale avec des fonctions holomorphes

En général, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

Si $f(z)$ est holomorphe sur $|\mathrm{Im}(z)| < A$

alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$

quand $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et $|\mathrm{Im}(z)| < A$.

⑨ Fonctions holomorphes

Vrai	Attention	Trop difficile	Non
$z \mapsto z^n$ $(n \geq 0)$	$z \mapsto \frac{1}{z}$	$\arg(z)$	$\lvert z\rvert$
$z \mapsto \exp(z)$	si $z \neq 0$	$\ln(z)$	$\mathrm{Re}(z)$

S2, C4

Règles

Si $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont holomorphes
alors $f_1(z) + f_2(z)$
et $\alpha f_1(z)$
sont holomorphes

Si $f_1(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et f_2 est
holomorphe sur $D_2 \subset \mathbb{C}$
et il existe D_1 tel que $z \in D_1$, $f_1(z) \in D_2$
alors $f_2(f_1(z))$ est holomorphes
sur D_1.