Question 1

F A. $\dfrac{e^{-(t-1)}}{e^{-t}} = \dfrac{e^{1}e^{-t}}{e^{-t}} = e^{1} \neq 1$

Donc il est faux que $e^{-(t-1)} \sim e^{-t}$ qd $t \to +\infty$

V. B. $\dfrac{1}{(t+1)^2+1} \times \dfrac{1}{\left(\frac{1}{t^2+1}\right)} = \dfrac{t^2+1}{(t+1)^2+1} = \dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t^2}} \to 1$

Donc $t^2+1 \sim (t+1)^2+1$ qd $t \to +\infty$.

F C. $\dfrac{\sin t\, e^{-t}}{\frac{1}{2}e^{-t}} = 2\sin(t) \not\to 1$ car

Si $t = k\pi$, $2\sin k\pi \to 0$ qd $k \to +\infty$.

V. D. changement de variable

$u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $dt = \sqrt{2}\,du$, $t = x \Rightarrow u = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}\,du$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du = \mathrm{erf}(x) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-u^2}du = 1-\mathrm{erf}(x)$$

$$\sqrt{2}\int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times\left(1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\sim \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi}\times\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}\times\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

S11, Qr 2

Question 2

V. A. $TF\left[e^{-|t-2|}\right] = TF\left[e^{-|t|}\right] \times e^{-2i\pi\nu 2}$

et $\left|e^{-2i\pi\nu 2}\right| = 1$.

F. B. $e^{-|t|}$ est pair

donc $\frac{d}{dt} e^{-|t|}$ est impair

et $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 0$ si $x(t)$ est impair.

en effet $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} x(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt$

$t' = -t \qquad x(-t') = -x(t)$

$= \int_0^{+\infty} x(t)\,dt + \int_{+\infty}^{0} x(-t')\,dt'\,(-1)$

$= \int_0^{+\infty} (x(t) - x(t))\,dt = 0$

F. C. $e^{-\frac{|t|}{2}} = x\left(\frac{t}{2}\right)$

Donc $TF\left[e^{-\frac{|t|}{2}}\right] = X(2\nu) \times 2$

$= 2 \times \frac{2}{1+4\pi^2(2\nu)^2} = \frac{4}{1+4\pi^2 4\nu^2}$

$= \frac{4}{1+16\pi^2\nu^2}$

F. D. $TF[\cos \pi t] = \frac{1}{2}\delta\left(\nu-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$

$TF\left[e^{-|t|}\cos \pi t\right] = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} * \left(\frac{1}{2}\delta\left(\nu-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)$

$$TF\left[e^{-|t|} \cos \pi t \right] = \frac{1}{1+4\pi^2(\nu-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(\nu+\frac{1}{2})^2}$$

Question 3

F. A. $h_1(t)$ est impair,
donc si $x(t)$ est impair
$y(t)$ est pair.

$$y(-t) = (h_1(t) * x(t))(-t)$$
$$= (h_1(-t) * x(-t))(t)$$
$$= (h_1(t) * x(t))(t)$$
$$= y(t)$$

En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} h(-t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty} (-h(\tau'))\, x(\tau'-t)\, d\tau'$

$\tau' = +\tau + t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, x(t-\tau')\, d\tau' = y(t).$$

V B. $h_1(t) = \frac{d}{dt} h_2(t) = \delta'(t) * h_2(t)$

$$x(t) * h_1(t) = x(t) * (\delta'(t) * h_2(t))$$
$$= \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) * h_2(t).$$

F.C. $h_1(t)$ est impair donc la TF est imaginaire pure.

$$h_1(t) = \frac{d}{dt} h_2(t)$$

$H_1(\nu) = TF[h_1(t)] = 2i\pi\nu\, H_2(\nu)$

$h_2(t) = -e^{-\pi\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)^2}$ Donc $H_2(\nu) = -e^{-\pi(\nu\sqrt{2}\sqrt{\pi})^2} \times \sqrt{2}\sqrt{\pi}$

S11, Q4

$$H_1(\nu) = 2i\pi\nu \times \left(-\sqrt{2}\sqrt{\pi}\right) e^{-2\pi^2\nu^2}$$

$$H_1(\nu) = -i\,(2\pi)^{3/2}\,\nu\, e^{-2\pi^2\nu^2}$$

V. D. $\frac{d}{dt} h_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + t \times (-t) e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$= (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Donc le tableau de variation de $h_1(t)$

$h_1(t)$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

$$h_1(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$h_1(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{e}}$$

D'où $|h_1(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Question 4

V A. $z(t)$ est périodique de la même période que $y(t)$ qui est de $\frac{2}{3}$ s car $y(t)$ est une sinusoïde de fréquence $\frac{3}{2}$ Hz

$Z(\nu)$ ne peut avoir plus de raies que ~~Y~~ $Y(\nu)$, car

$$Z(\nu) = \sum_k z_k \delta\left(\nu - k\frac{3}{2}\right)$$

$$z_k = Y_k X\left(\frac{3k}{2}\right)$$

F B. $T = \frac{2}{3}$.

V C. $Y_1 = \frac{1}{2}$, $Y_{-1} = \frac{-1}{2}$ et $\forall k \notin \{-1, 1\}$, $Y_k = 0$.

$z_1 = \frac{1}{2} X\left(\frac{3}{2}\right)$, $z_{-1} = \frac{1}{2} X\left(\frac{-3}{2}\right)$

$x(t)$ est pair donc $X\left(\frac{-3}{2}\right) = X\left(\frac{3}{2}\right)$

$z_{-1} = \frac{1}{2} X\left(\frac{3}{2}\right)$. $z(t) = z_1 e^{i2\pi\frac{3}{2}t} + z_{-1} e^{-i2\pi\frac{3}{2}t}$

$z(t) = X\left(\frac{3}{2}\right) \cos(3\pi t)$.

S11, Q5

F D. $z(t) = y(t) * x(t)$

$$\frac{d}{dt} z(t) = y(t) * \frac{d}{dt} x(t)$$

$$\frac{d}{dt} 1\!\!1_{[-1/2, 1/2]}(t) = \delta(t+\tfrac{1}{2}) - \delta(t-1/2)$$

en effet: $\int_{-\infty}^{t} (\delta(\tau+\frac{1}{2}) - \delta(\tau-\frac{1}{2}))d\tau = 0$ si $t < -\frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+\tfrac{1}{2}) - \delta(\tau-\tfrac{1}{2}))d\tau = 1 \text{ si } t \in]-1/2, 1/2[$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+\tfrac{1}{2}) - \delta(\tau-\tfrac{1}{2})\,d\tau = 0 \text{ si } t > 1/2.$$

Il y a une erreur sur lecalcul de la dérivée.

<u>Questions</u>

F A. $(x(t) * y(t))(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(-\tau)\, d\tau \overset{x(t)=y(-t)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (y(-\tau))^2 d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (y(\tau))^2 d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-2\tau} d\tau = \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2\tau}\right]_0^{\infty} = \tfrac{1}{2}.$$

V. B. $x(t) * y(t) = y(-t) * y(t) = \varphi_{yy}(t)$

c'est l'autocorrelation de y et c'est donc pair.

F C. $(x(t) * z(t))(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}\, 1\!\!1_{]-\infty,0]}(\tau)\, 1\!\!1_{[0,1]}(\cancel{\theta}-\tau)\, d\tau$

$$= \int_{-1}^{0} e^{\tau} d\tau = [e^{\tau}]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1} > 0$$

F D. Si c'était vrai, cela voudrait dire que presque toute fonctions est solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + y = 0$.

En fait, $\frac{d}{dt} y(t) = \delta(t) \quad e^{-t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

En effet, $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) - e^{-\tau} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\tau)\, d\tau = 0$ si $t<0$

et si $t>0$, $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) - e^{-\tau} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\tau)\, d\tau = 1 - \int_0^t e^{-\tau} d\tau$

$= 1 - \left[-e^{-\tau}\right]_0^t = 1 - (1 - e^{-t}) = e^{-t}$

$\frac{d}{dt} y(t) = \delta(t) - y(t).$

$\frac{d}{dt}\left(y(t) * z(t)\right) = -y(t) * z(t) + \delta(t) * z(t)$