Licence L2 ($2^{\text{ème}}$ année)

Mathématiques :
*Les nombres complexes de **A** à ...**Z***

par J.-B. Hiriart-Urruty, Professeur de mathématiques

2009

Objectifs :
– Consolider et approfondir les notions sur les nombres complexes (largement) abordées en classe de Terminale
– Illustrer la variété des applications des nombres complexes (équations algébriques, trigonométrie, transformations du plan).

Ce document, de niveau L1, sera considéré comme contenant les prérequis à l'utilisation des nombres complexes en L2. Il sera utile à celles et ceux venant de L1 mais aussi aux « entrant(e)s latéralement » en L2 (venant d'I.U.T. ou de sections de B.T.S. par exemple).

« *Quand on est dans* $\mathbb{C}$*, les calculs sont plus complexes...* »
(extrait d'une copie d'étudiant)

Table des matières

1 Le corps des nombres complexes

1.1 Construction du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni des lois de composition internes :

- **addition** $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$
- **multiplication** $(a, b).(a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$

a une structure de **corps** et est appelé corps des nombres complexes ; il est toujours noté par le graphisme $\mathbb{C}$. En effet, on vérifie facilement que :

- l'addition est associative et commutative ;
- $(0, 0)$ est élément neutre pour l'addition ;
- tout élément (a, b) a un symétrique pour l'addition, qui n'est autre que $(-a, -b)$.

$\Big\}$ $\mathbb{C}$ muni de la loi « addition » est un **groupe** commutatif.

- la multiplication est associative et commutative ;
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition ;

$\Big\}$ résulte des propriétés analogues de la multiplication dans $\mathbb{R}$

- $(1, 0)$ est élément neutre pour la multiplication :
  $(a, b).(1, 0) = (1, 0).(a, b) = (a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- tout élément $(a, b) \neq (0, 0)$ a un symétrique pour la multiplication, qui est $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$:

$$(a, b).\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).(a, b) = (1, 0)$$

Traditionnellement, on utilise, plutôt que (a, b), la **notation** $\boxed{a + ib}$.
Comment cela ? Soit $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ (défini ci-dessus). On a :

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1).(b, 0) \end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître systématiquement :

- le nombre complexe très particulier $i := (0, 1)$, pour lequel on constate que $i^2 = (-1, 0)$;
- des nombres complexes de la forme $(x, 0)$, où $x \in \mathbb{R}$.

Il est possible d'identifier $\mathbb{R}$ au sous-ensemble $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$ par l'application d'identification $x \mapsto (x, 0)$.

Désormais, on écrira $a + ib$ pour l'élément (a, b) de $\mathbb{C}$ auquel on se référait. On négligera également le symbole « . » de la multiplication.

À l'aide de ce codage et des propriétés de i ($i^2 = -1$), on manipule l'addition et la multiplication de nombres complexes comme dans le cas des nombres réels :

- $-(a + ib) = -a + i(-b)$;
- si $a + ib \neq 0$, $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$;
- $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

Remarques :
- Ce qui a été proposé ci-dessus n'est qu'**une** construction (de mathématicien) de $\mathbb{C}$, il y en a bien d'autres. L'important est que l'objet mathématique obtenu puisse être identifié à celui décrit ici.
- La notation $i = \sqrt{-1}$ est à éviter ! Elle ne prendrait de sens que si on avait donné un sens à « $\sqrt{z}, z \in \mathbb{C}$ », ce qui n'a pas été fait.
- En Électricité on utilise parfois (pour i) la notation j (car i est réservé à l'intensité du courant).

1.2 Formes et représentations d'un nombre complexe

1.2.1 Forme algébrique (ou cartésienne)

C'est celle que l'on vient de voir : $z = a + ib$, où a et b sont réels ;
- a est la **partie réelle** de z et on la note $\mathcal{R}e\ z$,
- b est la **partie imaginaire** de z et on la note $\mathcal{I}m\ z$.

$z \in \mathbb{C}$ est dit **imaginaire pur** lorsque $\mathcal{R}e\ z = 0$. L'élément 0 est le seul qui puisse revendiquer le statut de réel et celui d'imaginaire pur.

1.2.2 Représentation par un vecteur et par un point (représentation géométrique)

On appelle plan complexe $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit V l'ensemble des vecteurs (correspondant aux points) du plan $\mathcal{P}$, rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Le nombre complexe $z = a + ib$ est représenté par le **vecteur** $\vec{v}$ (de V) de coordonnées (a, b) ; l'application de représentation est :

$$(a + ib) \in \mathbb{C} \mapsto \vec{v} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} \in V.$$

On dit que $a + ib$ est **l'affixe** de $\vec{v}$.

Le nombre complexe $z = a + ib$ est aussi représenté par le **point** M (de $\mathcal{P}$) de coordonnées (a, b) ; l'application de représentation est :

$$(a + ib) \in \mathbb{C} \mapsto M \in \mathcal{P}, \text{ de coordonnées } (a, b).$$

On dit encore que $a + ib$ est **l'affixe** de M.

M est **l'image** (ponctuelle) de z.

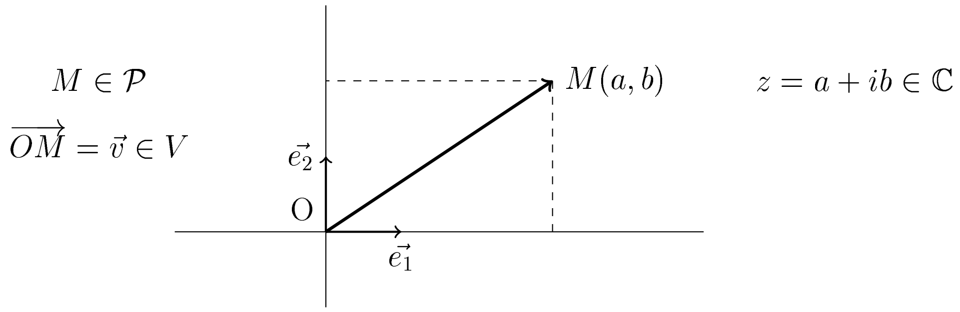


FIGURE 1 –

1.2.3 Forme trigonométrique

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Le nombre $a^2 + b^2$ est un réel positif ; le **module** de z, noté $|z|$, est le réel positif $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ (c'est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ si M est l'image de z).

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. **L'argument** de z est la classe modulo 2π des réels Θ vérifiant $\cos\Theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\Theta = \frac{b}{|z|}$. On note $\arg z$ l'un quelconque des éléments de cette classe. Par exemple,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \text{ modulo } 2\pi.$$

Dans la Figure 1 ci-dessus, un argument de z est une mesure de l'angle des vecteurs $\vec{e_1}$ et $\overrightarrow{OM}$.

$$\boxed{z = |z|(\cos\Theta + i\sin\Theta)}$$

est la **forme trigonométrique** de $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Pour $z = 0$, on notera que $|z| = 0$ et que Θ est indifférent.

1.2.4 Forme exponentielle

On sait (car vu en Terminale) ce qu'est le réel e^x lorsque x est un **nombre réel**. Comment pourrait-on définir e^z (l'exponentielle du nombre complexe z) de manière

- à préserver la définition de e^x lorsque z se trouve être un réel x ;
- à avoir les mêmes propriétés que l'exponentiation des réels ?

Pour des raisons qui apparaîtront plus nettement (à l'étudiant-lecteur) plus tard dans son cheminement scientifique, la meilleure façon de répondre aux questions posées au-dessus est de **définir** e^{ib}, $b \in \mathbb{R}$, comme étant $\cos b + i \sin b$. Ensuite, puisqu'on veut préserver la règle $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$, on est conduit à poser :

$$\boxed{e^{a+ib} := e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)}$$

On note e^z ou $\exp z$ l'exponentielle du nombre complexe z.

Désormais, toutes les fonctions trigonométriques cos, sin et exponentielles se mélangeront au travers de l'exponentiation complexe ($z \mapsto e^z$).

Quelques conséquences immédiates :

- $e^{i\pi} = -1$, la très belle formule d'EULER rassemblant 1, i, e et π dans une seule formule.
- Si $z = a + ib$, e^z a pour module e^a, de sorte que e^z n'est jamais nul.
- On sait que l'exponentiation envoie $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Qu'en est-il (pour l'exponentiation complexe) de l'ensemble $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ des imaginaires purs ? En fait :

  $|e^{ib}| = 1$ pour tout $b \in \mathbb{R}$;
  si $|z| = 1$, il existe b réel (et même plusieurs) tels que $e^{ib} = z$.

Donc l'image par l'application « exp » de $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1. Cet ensemble est traditionnellement noté $\mathbb{U}$,

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

et appelé le **cercle-unité** de $\mathbb{C}$.

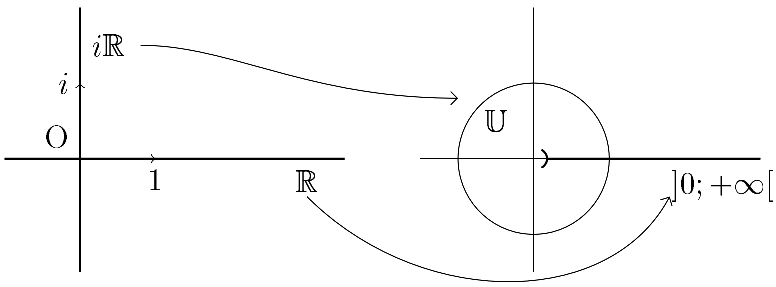


FIGURE 2 – Schématisation de $z \mapsto e^z$

- $\{e^z \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Mais attention, on n'a pas parlé de logarithme de $z \neq 0$!
- Si z et z' sont des nombres complexes, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. Mais attention, on n'utilise pas ici d'expressions comme $z^{z'}$!
- Si $z \neq 0$, il existe a et Θ réels tels que :

$$z = e^{a+ib} \quad (e^a \text{ est le module de } z,\ b \text{ un argument de } z)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z = |z|e^{i \arg z} \\ z = re^{i\Theta} \end{array}}$$

C'est ce qu'on appelle la **forme exponentielle** de z.

Exercices :

– Montrer que $e^{iz} = 1$ si et seulement si $\frac{z}{2\pi}$ est un entier relatif.
– Montrer que $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $\frac{z_1 - z_2}{2\pi}$ est un entier relatif.
– Soit $z \neq 0$. Comment trouver les $Z \in \mathbb{C}$ tels que $e^Z = z$?

- Prendre une courbe Γ de $\mathbb{C}$ de la forme $\{t + if(t) \mid t \in [a,b]\}$ où $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction pas trop compliquée, et dessiner l'image de Γ par l'opération d'exponentiation, c'est-à-dire $\{e^t.e^{if(t} \mid t \in [a,b]\}$. Ça peut être rapidement compliqué... La transformation $z \mapsto e^z$ est certainement une des plus importantes, sinon la plus importante, sur les nombres complexes.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Si z est le nombre complexe $a + ib$, le conjugué de z est le nombre complexe $a - ib$; on le note $\bar{z}$.

Pour la forme algébrique de $\bar{z}$, on a : $\mathcal{R}e\ \bar{z} = \mathcal{R}e\ z$ et $\mathcal{I}m\ \bar{z} = -\mathcal{I}m\ z$.

Concernant la représentation géométrique de $\bar{z}$, il est clair que le point $\bar{M}$ du plan complexe représentant (ou image de) $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des réels du point M représentant z.

Enfin, pour ce qui est de la forme exponentielle, notons que si $z = e^{a+ib}$, le conjugué de z n'est autre que e^{a-ib}.

Quelques propriétés immédiates :

- $\mathcal{R}e\ z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $\mathcal{I}m\ z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ [attention ici de ne pas oublier le i au dénominateur !].
- $\overline{(\bar{z})} = z$ [en faisant deux fois l'opération de conjugaison, on retombe sur nos pieds].
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$ [déjà vu mais fort important].

1.4 Propriétés du module d'un nombre complexe

Rappelons que si $z = a + ib$, le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Autrement dit : $|z|^2 = z\bar{z}$; ceci facilite grandement la démonstration des propriétés de $z \mapsto |z|$. En voici quelques-unes :

- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
- $|z| = |\bar{z}|$; $|\mathcal{I}m\ z| \leq |z|$; $|\mathcal{R}e\ z| \leq |z|$.
  En effet, de $a^2 \leq a^2 + b^2$ (par exemple) on tire $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
  Observons pour cela que
  $$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2|z_2|^2. \end{aligned}$$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité dite **triangulaire**).
  Pour voir cela, développons $|z_1 + z_2|^2$ (et non $(z_1 + z_2)^2$!). On a :
  $$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}.$$

Puisque $z_1\overline{z_2}$ est le conjugué de $z_2\overline{z_1}$, on a $z_1\overline{z_2} + \overline{z_2}z_1 = 2\mathcal{R}e\ (z_1\overline{z_2})$ (ou encore $2\mathcal{R}e\ (\overline{z_1}z_2)$).
Par suite,

$$2\mathcal{R}e\ (z_1\overline{z_2}) \leq 2|\mathcal{R}e\ (z_1\overline{z_2})| \leq 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1z_2| = 2|z_1||z_2|,$$

d'où :

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\mathcal{R}e\ (z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\end{aligned}$$

- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. En particulier, si $z \in \mathbb{U}$, il en est de même de $\frac{1}{z}$.

À retenir :
- le développement $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+2\mathcal{R}e\ (z_1\overline{z_2})+|z_2|^2$ $(= |z_1|^2+2\mathcal{R}e\ (\overline{z_1}z_2)+|z_2|^2)$, qu'il ne faut pas confondre avec

$$(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2.$$

- les propriétés : $\begin{cases} \bullet\ |z| = 0 \text{ équivaut à } z = 0\,; \\ \bullet\ |z_1z_2| = |z_1||z_2|\,; \\ \bullet\ |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{cases}$

qui généralisent les propriétés de la valeur absolue $|.|$ sur $\mathbb{R}$ et qui font dire que $|.|$ est une **norme** sur $\mathbb{C}$. On définit à partir de $|.|$ la distance entre deux nombres complexes comme suit :

$$\text{distance de } z_1 \text{ à } z_2 := |z_1 - z_2| \text{ (module de } z_1 - z_2).$$

Cela correspond bien à la distance euclidienne (usuelle) entre les deux points images de z_1 et z_2 dans le plan complexe.

2 Racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

2.1 Racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ de $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{z} \neq 0$

Soit z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ≥ 2. On appelle **racine $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ de** z tout nombre complexe Z tel que $Z^n = z$. Mais y en a-t-il ? Si oui, combien ?

Théorème 2.1.1. Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet n racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ (distinctes).

Démonstration : Tenter de trouver Z sous forme algébrique, c'est-à-dire $Z = X + iY$, tel que $(X+iY)^n = a+ib\ (= z)$ donne lieu à des équations et calculs absolument inextricables (à l'exception de $n = 2$ où on peut mener les calculs jusqu'au bout). Il faut donc procéder autrement.

Considérons z mis sous forme exponentielle : $z = re^{i\alpha}$; on cherche les Z également mis sous forme exponentielle : $Z = \rho e^{i\Theta}$. L'équation (à résoudre) $Z^n = z$ se traduit ainsi par $\left(\rho e^{i\Theta}\right)^n = re^{i\alpha}$, soit $\rho^n e^{in\Theta} = re^{i\alpha}$. En clair :

- L'égalité des modules donne $\rho^n = r$, d'où $\rho = \sqrt[n]{r}$ (ou $r^{1/n}$), c'est la racine $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ de r ;
- L'égalité $e^{in\Theta} = e^{i\alpha}$ donne $n\Theta = \alpha + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) ; il en sort $\Theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$). On a ainsi n valeurs distinctes :

$$\Theta_0 = \frac{\alpha}{n},\ \Theta_1 = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots, \Theta_{n-1} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} ;$$

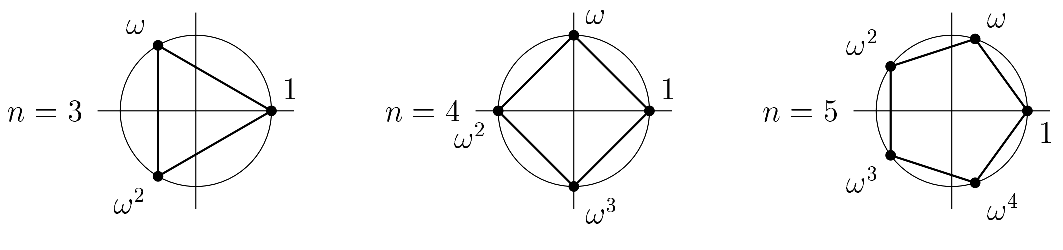
  ensuite on aura $\Theta_0 + 2\pi$, $\Theta_1 + 2\pi$, ..., $\Theta_{n-1} + 2\pi$, qui donneront les mêmes $e^{\Theta i}$ que précédemment.

En somme, on a mis en évidence n racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ distinctes de z qui sont :

$$\boxed{Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Il faut bien observer l'expression des Z_k : ils sont tous de même module, et en passant de Z_k à Z_{k+1} on décale l'argument de $\frac{2\pi}{n}$. Si on avait poursuivi l'écriture de Z_n, Z_{n+1}, etc. on aurait constaté que l'on retombait sur Z_0, Z_1, etc.

Exemple : Soit $z = 1$. Les n racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ de 1 sont $e^{i2k\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Si on pose $\omega := e^{i2\pi/n}$ ($= \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$), ces n racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ s'écrivent 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}. Bien sûr, 1 fait toujours partie des racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ de 1.



Le cas particulier de n = 2

Comme cela a été anoncé plus haut, c'est le seul cas où les formes algébriques peuvent être utilisées en étant sûr de pouvoir mener les calculs jusqu'au bout.

Soit donc $z = a + ib \neq 0$ et voyons ce que donne l'équation (en X et Y)

$$(X + iY)^2 = a + ib. \tag{1}$$

En développant $(X + iY)^2$, on voit aisément que (1) est équivalent à :

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = a \\ 2XY = b. \end{cases} \tag{1'}$$

Ceci doit permettre de déterminer X et Y... sauf qu'il s'agit d'un système de 2 équations à 2 inconnues qui n'est pas linéaire... too bad ! Nous allons donc ajouter un ingrédient qui va faciliter la résolution effective de (1'). Comme on doit avoir $|X+iY|^2 = |z|^2 = |Z|$ (car $z^2 = Z$, d'accord ?), une relation supplémentaire entre X et Y apparaît, à savoir :

$$X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{2}$$

En fait, la relation (2) est cachée dans (1')... En effet,

$$\begin{aligned}(X^2-Y^2)^2 + (2XY)^2 &= X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 \\ &= (X^2+Y^2)^2\end{aligned}$$

ce qui fait que (1') implique (2). Mais, dans la pratique, il ne faut pas craindre la surabondance d'information, il est donc recommandé de remplaer (1') par :

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 - Y^2 = a \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2XY = b. \end{array}\right. \tag{1''}$$

Les deux premières équations de (1") conduisent à $X^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)$, quantité qui est ≥ 0, et nulle exactement lorsque $a < 0$ et $b = 0$. On obtient ainsi X puis, grâce à la 3ème équation de (1") (ou accessoirement la 1ère), on déduit sans ambiguïté Y. Dans tous les cas de figure, $\mathbf{z = a + ib \neq 0}$ **admet 2 racines carrées** (plutôt que « racines 2èmes ») **opposées** (distinctes).

Exemple. Déterminons les 2 racines carrées de $4-3i$. Le système (1") devient dans ce cas :

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 - Y^2 = 4 \\ X^2 + Y^2 = 5 \\ 2XY = -3. \end{array}\right. \tag{3}$$

De la 1ère et 2ème équation de (3), on tire $2X^2 = 9$, d'où $X = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Par suite, la 3ème équation de (3) conduit à $Y = -\frac{3}{2X}$, soit $Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (pour $X = \frac{3\sqrt{2}}{2}$) et $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (pour $X = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$). Les deux racines carrées de $4-3i$ sont donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(3-i) \text{ et } -\frac{\sqrt{2}}{2}(3-i).$$

Vérifiez si vous n'êtes pas convaincu !

Exemple. Déterminons les 2 racines carrées de -9. Certes, nous savons que nous allons trouver $3i$ et $-3i$... Le système (1") s'écrit pour cet exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 - Y^2 = -9 \\ X^2 + Y^2 = 9 \\ 2XY = 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

Les 1ère et 2ème équations conduisent à $X^2 = 0$, soit $X = 0$. Ici, la 3ème équation est inopérante... mais la 1ère conduit à $Y^2 = 9$, soit $Y = 3$ et $Y = -3$. Les deux racines carrées de -9 sont bien $3i$ et $-3i$.

C'est précisément le calcul de racines carrées qui nous servira dans ce qui suit, à savoir la résolution d'une équation du second degré.

Exemple d'utilisation : la résolution d'une équation du second degré.
On cherche les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où les coefficients a, b et c sont des réels ou des **complexes** ($a \neq 0$). Comme dans le cas réel (en classe de Seconde), on factorise sous la forme

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0, \text{ soit } \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de $b^2 - 4ac$ (qui peut être complexe) ; ainsi δ et $-\delta$ sont les deux racines carrées (« racines $2^{\text{ièmes}}$ ») de δ. Les solutions de l'équation du second degré introduite au-dessus sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Considérons le cas particulier où a, b et c sont des réels et où $\Delta := b^2 - 4ac < 0$. Les racines carrées de Δ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$ (deux imaginaires purs donc). Les solutions (complexes) de $az^2 + bz + c = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Observons qu'ici z_2 n'est autre que $\overline{z_1}$.

2.2 Racines $\text{n}^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Ceci est un prolongement de l'exercice de la page 11.

Considérons $z = 1$, c'est-à-dire $z = e^{i0}$. Les n racines $\text{n}^{\text{ièmes}}$ de 1 sont les n complexes distincts suivants :

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Ils appartiennent tous au cercle-unité $\mathbb{U}$ et $\mathbb{C}$. Leurs images M_0, M_1, …, M_{n-1} sont les sommets d'un polygone convexe régulier à n sommets.

Lorsque n est pair, 1 et -1 font toujours partie de la liste des n racines $\text{n}^{\text{ièmes}}$ de 1. Quand $n > 2$, ce sont les deux seuls réels, les autres racines ayant une partie imaginaire non nulle.

Lorsque n est impair, 1 est la seule racine $\text{n}^{\text{ième}}$ rélle de 1.

Dans le cas particulier de $n = 3$, il arrive que l'on note $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Les racines $3^{\text{ièmes}}$ de 1 sont 1, j et j^2. D'ailleurs, $j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Dans le cas où $n = 4$, les quatre racines $4^{\text{èmes}}$ de 1 sont 1, -1, i et $-i$; leur somme est nulle.

Plus généralement, désignons par ω la « brique de base » $e^{i\frac{2\pi}{n}}$; elle sert à construire toutes les racines $\text{n}^{\text{ièmes}}$ de 1 :

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^k, \ldots, \omega^{n-1}.$$

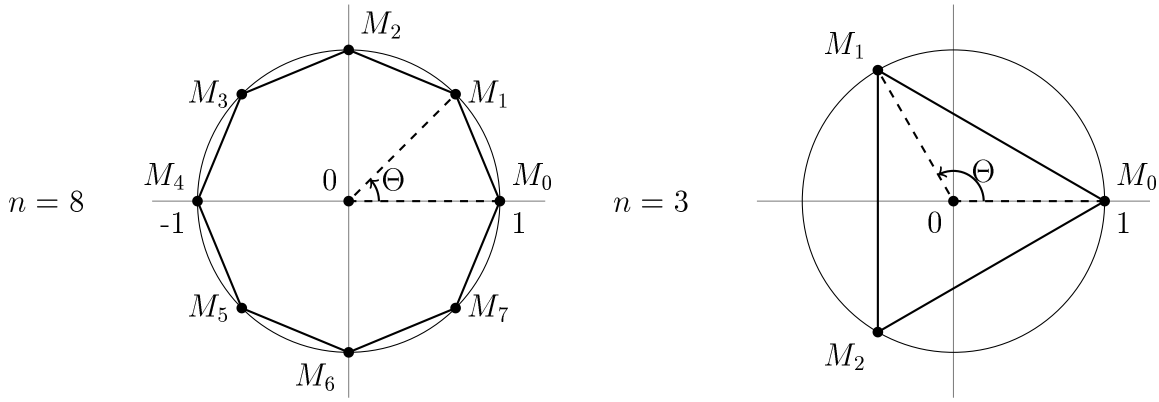


FIGURE 3 –

Proposition 2.2.1. La somme des n racines n[ièmes] de l'unité fait toujours 0 :

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^k+\cdots+\omega^{n-1}=0.$$

Démonstration. Le résultat se lit sur un dessin comme en Figure 3 :

$$\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{OM_1}+\cdots+\overrightarrow{OM_{n-1}}=\overrightarrow{0}.$$

Pour le démontrer, posons $S:=1+\omega+\cdots+\omega^{n-1}$. On va provoquer un décalage en multipliant S par ω (comme au rugby lorsque l'arrière s'intercale dans la ligne de trois-quarts) :

$$\omega S=\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n,$$

d'où :

$$S-\omega S=1-\omega^n \quad (\text{« téléscopage » de presque tous les termes}).$$

Comme $\omega\neq 1$ (car $n\geq 2$), on en déduit $S=\frac{1-\omega^n}{1-\omega}$.
Or $\omega^n=1$, d'où $S=0$.

3 Applications à la trigonométrie

Les fonctions trigonométriques, les exponentielles, les nombres complexes… tout ça se mélange harmonieusement.

Les formules à connaître pour les applications à la trigonométrie sont les suivantes :

- **Formules d'**EULER. Sachant que $e^{i\Theta}=\cos\Theta+i\sin\Theta$ ($\Theta\in\mathbb{R}$), on a :

$$\cos\Theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\Theta}+e^{-i\Theta}\right) \quad \left[\text{partie rélle de } e^{i\Theta}\right]$$

$$\sin\Theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\Theta}-e^{-i\Theta}\right) \quad \left[\text{partie imaginaire de } e^{i\Theta}\right]$$

attention de ne pas oublier le i ici !

- **Formule de** Moivre. Si n est un entier naturel,

$$\left(e^{i\Theta}\right)^n = \cos(n\Theta) + i\sin(n\Theta),$$

soit

$$\boxed{(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n = \cos(n\Theta) + i\sin(n\Theta)}$$

Voici une histoire qui court chez les mathématiciens. Abraham de Moivre (1667-1754) se contentait de six heures de sommeil. Cependant, à quatre-vingt-sept ans passés, il décida de dormir un quart d'heure de plus chaque nuit. Quand les vingt-quatre heures furent atteintes, il ne se réveilla plus, il était mort !

- **Formule du binôme de** Newton. Si u et v sont des nombres complexes et n un entier naturel,

$$\boxed{(u+v)^n = u^n + C_n^1 uv^{n-1} + \cdots + C_n^k u^k v^{n-k} + \cdots + C_n^{n-1} u^{n-1} v + v^n}$$

$$\text{où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \left(\text{noté aussi } \binom{n}{k}\right).$$

Observer bien la symétrie dans le développement :

$$C_n^k u^k v^{n-k} \text{ et } C_n^{n-k} u^{n-k} v^k$$

ces coefficients sont les mêmes

Exemple (connu depuis les classes de Collège) :

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3.$$

On utilise les nombres complexes pour simplifier des expressions trigonométriques.

Première illustration. On voudrait « linéariser » des expressions contenant $\cos^n x$ et $\sin^m x$. On sait combien cela est utile pour calculer des primitives ou intégrer des fonctions contenant ces expressions.

Par exemple, linéarisons $P(x) = \cos^2 x \sin^3 x$, $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant les formules d'Euler, on a :

$$\begin{aligned}
P(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \left[\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\right]^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \quad \text{[de manière à économiser les calculs]} \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2 \left(e^{ix}-e^{-ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix}-e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}+e^{-3ix}-e^{-5ix}\right) \quad \text{[après développement du produit]} \\
&= -\frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}-\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}-2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \quad \text{[on procède aux regroupements]} \\
&= -\frac{1}{16}\left(\sin 5x-\sin 3x-2\sin x\right).
\end{aligned}$$

C'est quand même plus sympathique que l'expression de départ de $P(x)$! Il n'y a plus dans cette nouvelle expression de $P(x)$ de puissances de $\cos x$ ou $\sin x$, d'où le vocable de « linéarisation ».

Une deuxième illustration. On voudrait « réduire » (comme en cuisine) des expressions trigonométriques.

Par exemple, réduisons en des expressions plus simples

$$\begin{aligned}
C_n(x) &:= \cos x + \cos(x+\alpha) + \cdots + \cos(x+n\alpha), \\
S_n(x) &:= \sin x + \sin(x+\alpha) + \cdots + \sin(x+n\alpha),
\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et α n'est pas un multiple de 2π.

Considérons $Z_n(x) := C_n(x) + iS_n(x)$. De cette manière :

$$\begin{aligned}
Z_n(x) &= e^{ix} + e^{i(x+\alpha)} + \cdots + e^{i(x+n\alpha)} \\
&= e^{ix}\left(1+e^{i\alpha}+\cdots+e^{in\alpha}\right) = e^{ix}\frac{e^{i(n+1)\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}
\end{aligned}$$

(α n'étant pas un multiple de 2π, on est assuré que $e^{i\alpha} \neq 1$).

On en déduit, en prenant les parties réelles et parties imaginaires des deux nombres :

$$C_n(x) = \cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad S_n(x) = \sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Remarque. On retiendra de cette manière de faire la règle d'or suivante : sinus et cosinus vont toujours ensemble. Dès que sinus apparaît (en intégration, équations différentielles, etc.), se poser la question de ce que ferait cosinus et s'il peut aider (co-sinus signifie bien « qui va avec sinus »). La raison en est que $\cos x$ et $\sin x$ sont les deux enfants de e^{ix}...

Exercice. Soit $\Theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$1 + e^{i\Theta} = 2\cos\frac{\Theta}{2} e^{i\frac{\Theta}{2}}.$$

Rép. L'astuce ici (et à retenir !) consiste à écrire $1 = e^{i\frac{\Theta}{2}} e^{-i\frac{\Theta}{2}}$ et $e^{i\Theta} = e^{i\frac{\Theta}{2}} e^{i\frac{\Theta}{2}}$. Par suite

$$1 + e^{i\Theta} = e^{i\frac{\Theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\Theta}{2}} + e^{i\frac{\Theta}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\Theta}{2}} \cos\frac{\Theta}{2}.$$

Exercice :

- Exprimer $\tan\Theta$ et fonction de $e^{2i\Theta}$.
- Simplifier des expressions comme

$$e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)}, \quad e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} \quad (a, b \text{ réels}) \quad ; \quad \left| \frac{1}{1 - re^{i\Theta}} \right|^2.$$

Rép.

- $\tan\Theta = \dfrac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = -i\dfrac{e^{2i\Theta} - 1}{e^{2i\Theta} + 1}$
- $e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} = 2\cos b \, e^{ia}$, $e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} = 2i \sin b \, e^{ia}$

$$\left| \frac{1}{1 - re^{i\Theta}} \right|^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2r\cos\Theta} = \frac{1}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\Theta}{2}}.$$

4 Applications à la géométrie plane. Transformations $\mathbf{z \mapsto az + b}$ et $\mathbf{z \mapsto a\bar{z} + b}$

a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

4.1 Transformation $\mathbf{z \mapsto az + b}$

Désignons par $S_{a,b}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z fait correspondre $S_{a,b}(z) := az + b$.

Propriétés de $\mathbf{S_{a,b}}$:

- $S_{a,b}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire : tout $z' \in \mathbb{C}$ admet pour $S_{a,b}$ un antécédent et un seul z ; cet antécédent est d'ailleurs facile à déterminer, $z = \frac{1}{a}(z' - b)$. On en déduit que $(S_{a,b})^{-1} = S_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$.
- Éléments invariants par $S_{a,b}$:
  - Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a aucun élément z de $\mathbb{C}$ tel que $S_{a,b}(z) = z$.
  - Si $a \neq 1$, il y a un et un seul élément z_0 tel que $S_{a,b}(z_0) = z_0$, c'est $z_0 = \frac{b}{1-a}$.

Interprétation géométrique dans le plan complexe.

Désignons par $f_{a,b}$ l'application du plan complexe $\mathcal{P}$ dans lui-même qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = S_{a,b}(z)$. Que peut-on dire de $f_{a,b}$?

– Si $a = 1$ et $b \neq 0$, $f_{1,b}$ est la **translation** de vecteur $\vec{v}$ d'affixe b.

– Si $a \neq 1$ mais de module 1, $z' = az + b$ s'écrit encore

$$z' - z_0 = a(z - z_0) \qquad \left[\text{ici } z_0 \text{ est le point invariant unique, } z_0 = \frac{b}{1-a}\right].$$

Si Ω est le point d'affixe z_0, on a :

$$\Omega M = \Omega M',\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \arg a \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

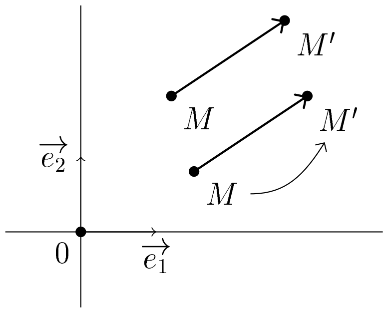
$f_{a,b}$ est ainsi la **rotation** de centre Ω et d'angle $\arg a$.

– Si $a \neq 1$ mais pas de module 1, $z' - z_0 = a(z - z_0)$, de sorte que

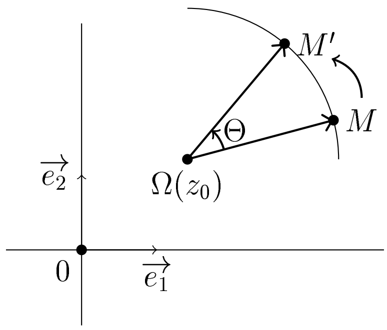
$$\Omega M' = |a| \Omega M,\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \arg a \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

$f_{a,b}$ est la **similitude directe** de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

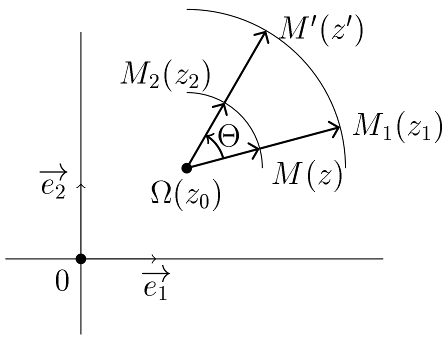
Contempler les trois figures ci-dessous :



$a = 1,\ z' = z + b$
$\overrightarrow{MM'} = \vec{v},\ b$ affixe de $\vec{v}$



$|a| = 1$, soit $a = e^{i\Theta}$, $\Theta = \arg a$ (modulo 2π)
$z' - z_0 = e^{i\Theta}(z - z_0)$



$|a| = r$, $\Theta = \arg a$ (modulo 2π)
$z' - z_0 = re^{i\Theta}(z - z_0)$, que l'on peut décomposer de deux façons :

$$\begin{cases} \quad\ \ z_1 - z_0 = r(z - z_0) & [\text{homothétie suivie} \\ \text{puis } z' - z_0 = e^{i\Theta}(z_1 - z_0) & \text{d'une rotation}] \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{cases} \quad\ \ z_2 - z_0 = e^{i\Theta}(z - z_0) & [\text{rotation suivie} \\ \text{puis } z' - z_0 = r(z_2 - z_0) & \text{d'une homothétie}] \end{cases}$$

FIGURE 4 –

4.2 Transformation de $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{a\bar{z}+b}$.

Désignons par $A_{a,b}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z fait correspondre $A_{a,b}(z) := a\bar{z}+b$.

Propriétés de $\mathbf{A_{a,b}}$:

- $A_{a,b}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$: l'antécédent de $z' \in \mathbb{C}$ pour $A_{a,b}$ est $z = \frac{1}{\bar{a}}(\bar{z}' - \bar{b})$. On en déduit que $(A_{a,b})^{-1} = A\left(\frac{1}{\bar{a}}, -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)$.
- Éléments invariants par $A_{a,b}$ [résultats à démontrer sous forme d'exercices]
  - Si $|a| \neq 1$, $z_0 = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ est un élément de $\mathbb{C}$ invariant par $A_{a,b}$ et c'est le seul.
  - Si $|a| = 1$ et $a\bar{b}+b \neq 0$, il n'y a pas d'élément de $\mathbb{C}$ invariant par $A_{a,b}$.
  - Si $|a| = 1$ et $a\bar{b}+b = 0$, on a nécessairement $a = -\dfrac{b}{\bar{b}} = \dfrac{1}{\bar{a}}$ et $-\dfrac{\bar{b}}{\bar{a}} = b$, de sorte que $(A_{a,b})^{-1} = A_{a,b}$. Les invariants pour $A_{a,b}$ sont les $z \in \mathbb{C}$ de la forme :

    $z = \dfrac{b}{2} + r$, $r \in \mathbb{R}$, lorsque $a = 1$ (auquel cas b est un imaginaire pur) ;

    $z = \dfrac{b}{2} + ir$, $r \in \mathbb{R}$, lorsque $a = -1$ (auquel cas b est un réel) ;

    $z = \dfrac{b}{2} + t(\beta + i(1-\alpha))$, $t \in \mathbb{R}$, lorsque $a = \alpha + i\beta \neq 1$.

Interprétation géométrique dans le plan complexe.

Désignons par $g_{a,b}$ l'application du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = A_{a,b}(z)$. Quelle est cette transformation $g_{a,b}$ du plan ?

Étant donné $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, soit $M_1'(z_1')$ et $M_2'(z_2')$ leurs images respectives par $g_{a,b}$. De la relation $z_2' - z_1' = a(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = a(\overline{z_2 - z_1})$, on déduit $M_1'M_2' = |a|M_1M_2$. Alors :

- Si $|a| \neq 1$, $g_{a,b}$ est une **similitude indirecte**, composée (commutative) de l'homothétie de centre $I(z_0)$ ($z_0 = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ unique élément invariant) et de rapport $|a|$, avec une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par I.
- Si $|a| = 1$ et $a\bar{b}+b \neq 0$, $g_{a,b}$ est une **isométrie sans point invariant**. C'est la composée (commutative) d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation dont le vecteur dirige l'axe de symétrie.
- Si $|a| = 1$ et $a\bar{b}+b = 0$, $g_{a,b}$ est une **isométrie avec une droite de points invariants**. C'est la symétrie orthogonale par rapport à cette droite.

Les transformations géométriques du plan complexe, notamment les plus simples (celles du § 4.1), font les délices de ceux qui font des sujets de Baccalauréat.

5 Le théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$ une fonction polynomiale de $z \in \mathbb{C}$, où les coefficients $a_n, \cdots, a_0$ (il y en a $n+1$) sont complexes. On suppose $a_n \neq 0$ (sinon on l'aurait fait disparaitre). L'entier n s'appelle le degré de P.

Racines de P

On dit que $r \in \mathbb{C}$ est **racine** (on dit aussi **zéro**) **d'ordre m $\geq$ 1 de P** si $P(z)$ peut être factorisé sous la forme :

$$P(z) = (z - r)^m Q(z),$$

où Q est également polynomial (de degré $n - m$) avec $Q(r) \neq 0$.

Si r est racine d'ordre m de P, alors r est racine d'ordre $m - 1$ de P' (dérivée de P).

Factorisation

- $P(z)$ peut être factorisé en $(z - r)Q(z)$ avec Q polynomial si, et seulement si, $P(r) = 0$.
- $P(z)$ peut être factorisé en $(z - r)^m Q(z)$ avec Q polynomial si, et seulement si, $P(r) = 0$, $P'(r) = 0$, ..., $P^{(m-1)}(r) = 0$ ($P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P).

> **Théorème fondamental** (de $\mathbb{C}$ plutôt que de l'algèbre), appelé aussi **Théorème de D'Alembert-Gauss**.
> P polynomial (mais non constant) admet au moins une racine ; c'est-à-dire : **il existe** $r \in \mathbb{C}$ tel que $P(r) = 0$.

Il existe une multitude de démonstrations de ce théorème, un site web leur est même consacré ; ça dépend de ce qu'on suppose connu... comme souvent dans une démonstration mathématique. Nous proposons des produits locaux : une démonstration utilisant les connaissances d'Analyse (réelle) du L1 (et un peu de L2)
J.-B. HIRIART-URRUTY, *Le théorème fondamental de l'algèbre. Une démonstration par le calcul différentiel et l'optimisation.* Bulletin de l'APMEP, №466, p. 695-698 (publiée en 2006).

Avec les résultats de factorisation, le théorème est complété en :

$$P(z) = a_n (z - r_1)^{m_1} (z - r_2)^{m_2} \cdots (z - r_k)^{m_k},$$

l'entier m_i désignant l'ordre (ou la multiplicité) de la racine r_i. Bien sûr,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Cas particulier où les coefficients $\mathbf{a_i}$ sont réels.

Dans ce cas, si $r \in \mathbb{C}$ est racine de P d'ordre m, il en est de même de $\bar{r}$ (facile à voir puisque $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Il y a donc deux types de racines de P :

– les racines réelles (if any !) ; il y en a certainement si n est impair ;
– les racines complexes qui vont deux par deux : r_1 et $\overline{r_1}$, r_2 et $\overline{r_2}$, etc.

• **Relations entre racines et coefficients.**
Soit :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n \underbrace{\left(z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} \right)}_{\substack{\text{partie factorisée en} \\ (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)}} \end{aligned}$$

[on fait apparaître toutes les racines : une racine double deux fois, une racine d'ordre m m fois.]

Il y a des relations entre les racines r_i et les coefficients a_i de P.

Commençons par rappeler ce que l'on sait faire (depuis la Seconde), c'est-à-dire le cas des trinomes du second degré.

Si $P(z) = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$ a pour racines r_1 et r_2, on a

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \ r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

De manière générale, on a :

$$\begin{array}{lr} r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{(somme des racines)}\,; & [k=1] \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_2r_3 + r_2r_4 + \cdots + r_{n-1}r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \quad ; & [k=2] \\ \text{(produits de deux racines, en bref } \displaystyle\sum_{i<j} r_i r_j\text{)} & \vdots \\ \ldots\ldots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad ; & [k] \\ \text{(produits de } k \text{ racines)} & \vdots \\ r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. & [n] \end{array}$$

Attention à l'alternance de signes ! La première et la dernière formules sont les plus importantes.

Exemple ($n = 3$). Soit $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, de racines r_1, r_2 et r_3. Alors

$$z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$$

se traduit en :

$$\begin{gathered} r_1 + r_2 + r_3 = -\alpha \\ r_1 r_1 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \beta \\ r_1 r_2 r_3 = -\gamma. \end{gathered}$$

Quelques exercices

Résoudre $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = e^{i\Theta}$, $x \in \mathbb{R}$.

Rép. $x_k = \tan\left(\dfrac{\Theta_k}{2}\right)$, où $\Theta_k = \dfrac{\Theta + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Si $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est tel que $\bar{a}b \neq 1$, on pose $c = \dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.
Montrer : $(|c| = 1) \Leftrightarrow (|a| = 1)$ ou $(|b| = 1)$.

Rép. $(|c| = 1) \Leftrightarrow (c\bar{c} = 1) \Leftrightarrow \left((a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})\right) \Leftrightarrow ((1-|a|^2)(1-|b|^2) = 0)$.

Résoudre l'équation $(z+1)^n = \cos(2na) + i\sin(2na)$, où $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.
En déduire une expression simple de

$$P_n(a) := \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

lorsque $\sin a \neq 0$.

Rép. $z_k = 2ie^{i(a+\frac{k\pi}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
Le produit des racines vaut $(-1)^n(1 - e^{i2na})$, d'où $P_n(a) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\dfrac{\sin(na)}{\sin a}$.

Calculer la somme $S := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{(\cos\alpha)^k}$ lorsque $\cos\alpha \neq 0$.

Rép. En utilisant une suite géométrique de raison $\dfrac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}$, on arrive à :

$$S = \frac{1}{\cos^{n+1}\alpha}\cdot\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

Soit n un entier ≥ 2 et $z_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $(1-z_n)(1-z_n^2)\cdots(1-z_n^{n-1})$.

Rép. n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\Theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\Theta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(k\Theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\Theta}{2}\right)\cos\frac{(n+1)\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

Indic. Utiliser $$\sin(k\Theta) = \frac{e^{ik\Theta} - e^{-ik\Theta}}{2i} = \frac{\left(e^{i\Theta}\right)^k - \left(e^{-i\Theta}\right)^k}{2i}.$$

Soit n un entier impair et soit $\Theta \in \mathbb{R}$. Montrer

$$2^{n-1}\cos^n\Theta = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\Theta.$$

Indic. Utiliser $\cos^n\Theta = \left(\dfrac{e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}}{2}\right)^n$.

Soit $n = 2p$ un entier pair. Montrer

$$\cos(2p\,x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} (-1)^{n-k} \cos^{2k} x \sin^{2(p-k)} x.$$

Indic. Penser à utiliser la formule de Moivre.

Vérifier que le cercle-unité $\mathbb{U}$ muni de la loi « multiplication » est un groupe. Même question pour l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}\}$ des racines de l'unité.

Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m\ z > 0\}$ (appelé demi-plan de Poincaré) et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (appelé disque-unité de $\mathbb{C}$). Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.

Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$. Qu'est-ce que

$$\{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0\}?$$

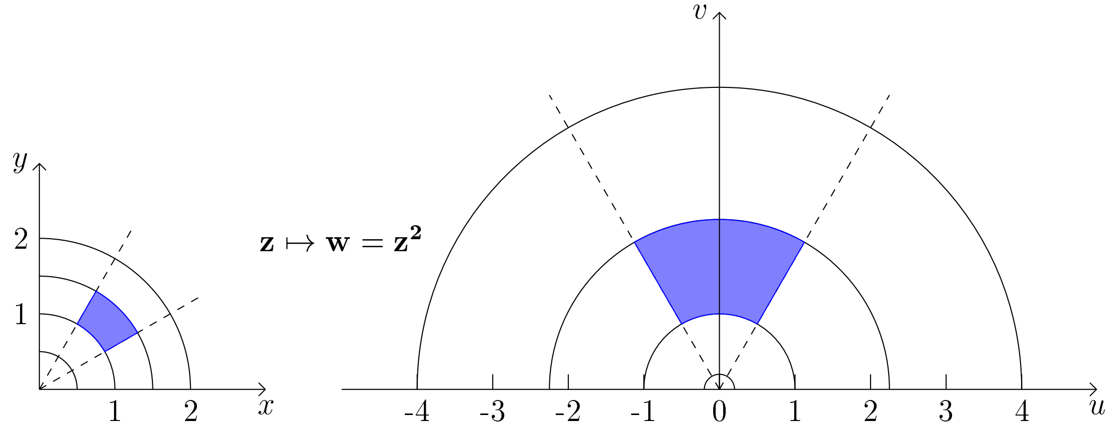
Rép. L'ensemble vide ou un cercle.

On considère l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) := z^2 \in \mathbb{C}$.

Que deviennent avec cette transformation les cercles de rayon r_0 ? les droites d'équation polaire $\Theta = \Theta_0$? les droites d'équation $x = c$? les droites d'équation $y = k$?

Ce type de tranformation est utilisé en Informatique graphique.

Rép. Un cercle d'équation $r = r_0$ devient un cercle d'équation $r = r_0^2$; une droite d'équation $\Theta = \Theta_0$ devient une droite d'équation $\Theta = 2\Theta_0$.
La figure ci-contre montre que la région $\{1 \leq |z| \leq \frac{3}{2} \text{ et } \frac{\pi}{6} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{3}\}$ est transformée en la région $\{1 \leq |w| \leq \frac{9}{4} \text{ et } \frac{\pi}{3} \leq \Theta \leq \frac{2\pi}{3}\}$.



La droite d'équation $x = c$ est transformée en parabole d'équation $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$;
la droite d'équation $y = k$ est transformée en parabole d'équation $v^2 = 4k^2(k^2 + u)$.