Séance 12

exercice 1

On considère $x(t) = t\,\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.
$y(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

On cherche à calculer la TF de $x(t)$, notée $X(\nu)$

1. Sachant que $TF[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$

   Montrez que $Y(\nu) = TF[y(t)] = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$

2. Calculez $\frac{d}{d\nu} Y(\nu)$

$$\frac{d}{d\nu} Y(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} e^{-2i\pi\nu} - \frac{2i\pi}{\nu} e^{-2i\pi\nu}\right)$$

3. En déduire que

$$X(\nu) = -\left(\frac{\frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}\right)$$

4. Le developpement limité à l'ordre 2 de e^x est $1 + x + \frac{x^2}{2}$, montrez que

$$\lim_{\nu \to 0} X(\nu) = \frac{1}{2}.$$

5. Pourquoi a-t-on $\frac{1}{2} = \int_0^1 x(t)\,dt$?

On considère $z(t) = \delta' * x(t)$

6. Montrez que $z(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \delta(t-1)$

7. Calculez $Z(\nu)$ et montrez que

$$Z(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu} - 2i\pi\nu\, e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

8. Montrez que $Z(\nu) = 2i\pi\nu\, X(\nu)$

Montrez que

9. $$X(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu} - 2i\pi\nu e^{-2i\pi\nu}}{-4\pi^2\nu^2}$$

Exercice 2

On note $x(t) = t$
$y(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$
$z(t) = x(t) * y(t)$.

1. Montrez que $x(t) * y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\,d\tau$
2. Montrez que $z(t) = t - 1/2$
3. Montrez que $TF[x(t)] = X(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\delta'(\nu)$
4. Sachant que $TF[\mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(t)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$,
   montrez que $Y(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$

On admet ici que $f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$

5. En utilisant le développement limité de $e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, montrez que
   $$\left.\frac{d}{d\nu} Y(\nu)\right|_{\nu=0} = -i\pi \text{ et } Y(0) = 1$$
6. Montrez que $Z(\nu) = \frac{i}{2\pi}\delta'(\nu) \; \frac{-1}{2}\delta(\nu)$
   en utilisant le fait que $z(t) = x(t) * y(t)$
   et donc $Z(\nu) = X(\nu)\,Y(\nu)$
7. Confirmez cette relation avec
   $z(t) = t - 1/2$.

exercice3

On note $x(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

$$y(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{i}{2\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

on admet ici que $\int vp\left(\frac{1}{\tau}\right) f(\tau) d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\tau| > \varepsilon} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau}$

1. Montrez que
$$z(t) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \frac{i}{2\pi} \ln\left|\frac{t}{t-1}\right|$$

2. Représentez la partie réelle et imaginaire de $z(t)$.

3. Montrez que $Y(\nu) = H(\nu) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\nu)$

4. Montrez que $Z(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$, représentez $|Z(\nu)|$

On admet ici que $X(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$.