Séance 11

Exercices

exercice 1

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-\pi t^2}$

On considère en entrée $x(t) = 1\!\!1_{[-1/2, 1/2]}(t)$

On note $y(t)$ la sortie.

1. Montrez que $y(t) = \displaystyle\int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-\pi \tau^2} d\tau$

2. On note $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$

   Montrez que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$.

3. Exprimez $y(t)$ en fonction de erf

   $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{erf}\left((t+1/2)\sqrt{\pi}\right) - \operatorname{erf}\left((t-1/2)\sqrt{\pi}\right)\right)$

4. On sait que quand $x \to +\infty$

   $$\frac{1 - \operatorname{erf}(x)}{\left(\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\right)} \to 1$$

   En déduire que $\dfrac{y(t)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left((t-1/2)\sqrt{\pi}\right)} \to 1$

5. Montrez que

   $$\frac{y(t)}{\left(\frac{e^{-\pi(t-1/2)^2}}{2\pi t}\right)} \to 1$$

exercice 2

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-\pi t^2}$

Et on considère $x(t) = \cos(2\pi t)$

1. on admet ici que la TF d'une gaussienne $e^{-\pi t^2}$ est une gaussienne de la forme $a\, e^{-b\nu^2} = H(\nu)$

   Justifiez que $H(0) = \int_{\infty}^{+\infty} h(t)\, dt$

   et montrez que $a = 1$.

2. Justifiez que $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu)\, d\nu$

   et montrez que $b = \pi$.

3. Calculez $X(\nu)$ et $Y(\nu)$

4. Montrez que $y(t) = e^{-\pi} \cos(2\pi t)$.

exercice 3

On considère $x(t) = \cos(2\pi t)$

et $w(t) = e^{-\pi t^2}$. On définit $y(t) = x(t)\, w(t)$

et on cherche à calculez $Y(\nu) = TF[x(t)]$.

1. Calculez $X(\nu)$.

   on admet ici que $W(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$

2. Montrez que $Y(\nu) = \frac{1}{2} e^{-\pi(\nu-1)^2} + \frac{1}{2} e^{-\pi(\nu+1)^2}$.

3. Représentez $Y(\nu)$.

   et déterminez $\Delta\nu$ la largeur de bande à mi-hauteur $Y(1 \pm \frac{\Delta\nu}{2}) \simeq \frac{1}{2} Y(1)$.