Séance 10

Exercice 1.

On cherche à calculer l'autocorrélation, $\varphi_{xx}(t)$ pour $x(t) = e^{-\pi t^2}$.
On admet ici que $TF[e^{-\pi t^2}] = e^{-\pi \nu^2}$

1. Calculez $S_{xx}(\nu) = TF[\varphi_{xx}(t)]$ et montrez que $S_{xx}(\nu) = e^{-2\pi\nu^2}$

2. Montrez que $S_{xx}(\nu) = X(\sqrt{2}\,\nu)$

3. Montrez que $\varphi_{xx}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi t^2}{2}}$

Exercice 2

On considère $x(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$,
et $y(t) = x(t) * x(t)$

1. Montrez que $y(t) = \left(\int_0^t x(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

2. Montrez que $y(t) = t e^{-\alpha t}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

Exercice 3

On considère $x(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$
et $\varphi_{xx}(t)$ son autocorrélation.

1. Montrez que $\varphi_{xx}(-t) = \varphi_{xx}(t)^*$

2. Pour $t \geq 0$, montrez que
$$\varphi_{xx}(t) = \int_t^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau - t)^*\, d\tau$$

3. Montrez que
$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

exercice 4

On considère $x(t) = e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ avec $\alpha > 0$.
On sait que $\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$

1. Calculez E_x et montrez que
$$E_x = \frac{1}{2\alpha}$$
2. Montrez que $E_x = \varphi_{xx}(0)$.

exercice 5

1. Montrez que $TF\left[e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\right] = \frac{1}{\alpha + 2i\pi\nu}$

On considère $x(t) = e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

2. Montrez que
$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$
On sait que $\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\alpha}$

3. Montrez que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2} = \pi \quad \text{en utilisant } \alpha = 2\pi.$$

exercice 6

En utilisant les exercices précédents, montrez que
$$TF\left[t e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\right] = \frac{1}{(\alpha + 2i\pi\nu)^2}$$