Séance 12
Cours

① Cours sur les distributions.

Ce ne sont pas des fonctions, donc de nombreuses opérations ne fonctionnent pas de la même façon.

$\delta(t-a)$: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t)\, dt = f(a)$$

$\delta'(t-a)$: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-a) f(t)\, dt = -f'(a)$$

$\delta''(t-a)$: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta''(t-a) f(t)\, dt = f''(a)$$

$vp\left(\frac{1}{t-a}\right)$: $$\int_{-\infty}^{+\infty} vp\left(\frac{1}{t-a}\right)(t-a) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

$\delta(t)$ est pair
$\delta'(t)$ est impair
$\delta''(t)$ est pair
$vp\left(\frac{1}{t}\right)$ est impair

$TF[1] = \delta(\nu)$
$TF[\delta(t)] = 1$
$TF[\delta'(t)] = 2i\pi\nu$
$TF[\delta''(t)] = (2i\pi\nu)^2$
$TF[\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)] = \frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta(\nu)$
$TF[vp\left(\frac{1}{t}\right)] = i\pi - 2i\pi \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\nu)$

$$TF^{-1}[1] = \delta(t)$$
$$TF^{-1}[\delta(\nu)] = 1$$
$$TF^{-1}[\delta'(\nu)] = -2i\pi t$$
$$TF^{-1}[\delta''(\nu)] = (2i\pi t)^2$$
$$TF^{-1}[\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\nu)] = -\frac{1}{2i\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\delta(t)$$
$$TF^{-1}\left[vp\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = 2i\pi \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) - i\pi$$

② Information supplémentaire sur les distributions

$$\delta(t) * x(t) = x(t)$$
$$\delta'(t) * x(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$
$$\delta''(t) * x(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$
$$\frac{d}{dt} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \delta(t-a) - \delta(t-b)$$

$$f(t)\,\delta(t-a) = f(a)\,\delta(t-a)$$
$$f(t)\,\delta'(t-a) = f(a)\,\delta'(t-a) - f'(a)\,\delta(t-a)$$
$$vp\left(\frac{1}{t}\right) x(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x(t)dt}{t} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(t)dt}{t}\right]$$

③ Utilisation des valeurs absolues

Je conseille de traiter séparément chaque intervalle.

$$x(t) = |t-a| + |t-b| = \begin{cases} 2t-a-b & \text{si } t \geq b \\ a-b & \text{si } t \in [a,b] \\ a+b-2t & \text{si } t \leq a \end{cases}$$
avec $b > a$

Les valeurs absolues ont des comportement curieux :

$$\frac{d}{dt}|t| = 2\left(\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) - \frac{1}{2}\right).$$

en effet

si $t>0$, $\frac{d}{dt}|t| = \frac{d}{dt} t = 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

Si $t<0$, $\frac{d}{dt}|t| = \frac{d}{dt}(-t) = -1 = 2\left(0 - \frac{1}{2}\right)$

Donc une primitive de $1\!\!1_{[0,+\infty[}(t)$

est $\dfrac{|t| + t}{2}$

④ Exemple de calcul avec $vp\left(\frac{1}{t}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} vp\left(\frac{1}{t}\right) 1\!\!1_{[-1/2, 1/2]}(t)\, dt$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-1/2}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dt}{t} \right]$$

$$\int_{-1/2}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t} = \left[\ln(-t)\right]_{-1/2}^{-\varepsilon} = \ln(-(-\varepsilon)) - \ln(-(-1/2)) = \ln \varepsilon - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

en effet $-t>0$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln(-t)\right) = -\left(\frac{1}{-t}\right) = \frac{1}{t}$$

$$\int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dt}{t} = \left[\ln t\right]_{\varepsilon}^{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(\varepsilon)$$

D'où $\int_{-1/2}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = 0$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} vp\left(\frac{1}{t}\right) 1\!\!1_{[-1/2,1/2]}(t)\, dt = 0$

Cela était prévisible.

$vp\left(\frac{1}{t}\right)$ est impair, $1\!\!1_{[-1/2, 1/2]}(t)$ est pair

donc $vp\left(\frac{1}{t}\right) 1\!\!1_{[-1/2, 1/2]}$ est impair.

S 12, C 4

$$\int_{-1/2}^{1/2} vp\left(\frac{1}{t}\right) dt = 0 .$$