Séance 10

Cours

1. Définition de l'autocorrélation pour des signaux non-périodiques.

$$\varphi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau - t)^* \, d\tau$$

on peut remarquer que

$\tau - (\tau - t) = t$

L'intégration est sur τ.

Si on pose $y(t) = x(-t)^*$

$\varphi_{xx}(t) = x(t) * y(t)$

⚠ C'est seulement pour un signal pair et réel que $\varphi_{xx}(t) = x(t) * x(t)$

2. Lien avec la transformée de Fourier

$$TF[\varphi_{xx}(t)] = \left| TF[x(t)] \right|^2$$

En effet $TF[x(t) * x(-t)^*] = X(\nu)\, X(\nu)^* = |X(\nu)|^2$.

Cela s'appelle la densité spectrale d'énergie.

$$S_{xx}(\nu) = TF[\varphi_{xx}(t)] = |X(\nu)|^2$$

On remarque $S_{xx}(\nu) \geq 0$.

Le nom s'explique parce que

énergie $\rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu)\, d\nu$

En effet $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu) d\nu$

3. Propriété de l'autocorrélation

- $\varphi_{xx}(0) = E_x$

En effet $\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau - 0)^* d\tau = E_x$

- $|\varphi_{xx}(t)| \leq E_x$

La justification est plus délicate.

Tout d'abord, on a $\left|\int fg\right| \leq \sqrt{\int f^2}\sqrt{\int g^2}$

car pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int (f+\lambda g)^2 = \int f^2 + 2\lambda\int fg + \lambda^2\int g^2$$

donc le discriminant de ce polynôme en λ est négatif

$$\Delta = 4\left(\int fg\right)^2 - 4\int g^2\int f^2 \leq 0$$

d'où $\left(\int gf\right)^2 \leq \int g^2 \int f^2$

Ensuite

$$|\varphi_{xx}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau-t)^* d\tau\right|$$

$$\leq \sqrt{\int |x(\tau)|^2}\sqrt{\int |x(\tau-t)^*|^2 d\tau} = \sqrt{E_x}\sqrt{E_x} = E_x$$

- $\varphi_{xx}(-t) = \varphi_{xx}(t)^*$

  Si $x(t) \in \mathbb{R}$ $\varphi_{xx}(t)$ est pair

- Si $y(t) = x(t-a)$

  alors $\varphi_{xx}(t) = \varphi_{yy}(t)$.

"on perd l'information de phase du signal".

4. Qu'est-ce que l'autocorrélation mesure ?

On pose $y(t) = x(t-a)$ et $z(t) = x(t) - y(t)$

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)-y(t))(x(t)^* - y(t)^*) dt$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt - 2 \,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t)^* dt\right)$$

$$E_z = E_x + E_y - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-a)^* dt\right)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-a)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

$$E_z = 2E_x - 2\,\mathrm{Re}\, \varphi_{xx}(a)$$

E_z est l'erreur quadratique moyenne au carré entre le signal $x(t)$ et lui-même retardé de a.

Plus $\varphi_{xx}(a)$ augmente, plus E_z diminue et plus cela signifie que $x(t)$ ressemble à $x(t-a)$.

5. Interprétation des propriétés.

- $|\varphi_{xx}(t)| \leq \varphi_{xx}(0)$

  La ressemblance la plus forte est quand $t=0$, en comparant $x(t)$ à lui-même.

- Si $x(t)$ est réel,

  $\varphi_{xx}(-a)$ est la ressemblance entre $x(t)$ et $x(t+a)$ qui est la même qu'entre $x(t-a)$ et $x(t)$ donc la même que $\varphi_{xx}(a)$.

- $y(t) = x(t-b)$ alors $\varphi_{xx}(t) = \varphi_{yy}(t)$

  La ressemblance entre $x(t)$ et $x(t-a)$ est la même qu'entre $x(t-b)$ et $x(t-a-b)$.

- $\varphi_{xx}(0) = TF^{-1}[|X(\nu)|^2](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = E_x$.

- Tout comme E_x, φ_{xx} n'est pas linéaire par rapport à x.

  $$\varphi_{x+y,\,x+y} \neq \varphi_{x,x} + \varphi_{yy}$$

  $$\varphi_{\alpha x,\,\alpha x} = \alpha^2 \varphi_{xx}$$

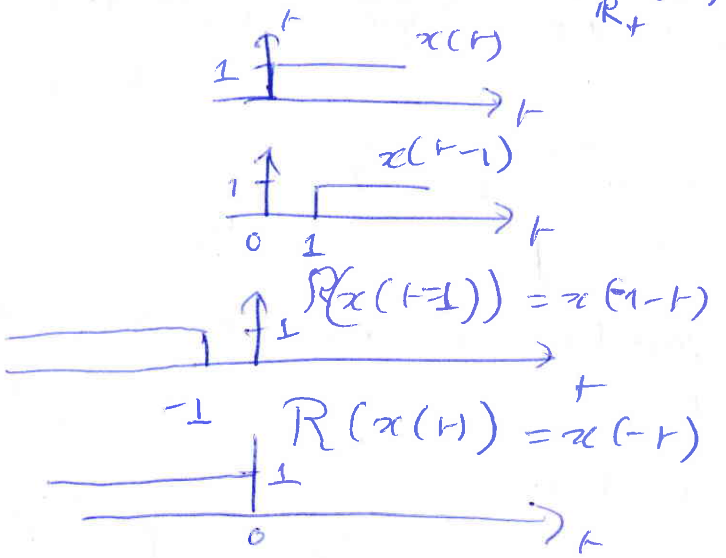
6. A propos du retournement de l'échelle des temps.

On note $\mathcal{R} : x(t) \longmapsto x(-t)$

$\mathcal{R}$ n'est pas un filtre

$$\mathcal{R}(x(t-1))(t-1) = \mathcal{R}(x(t))(t+1)$$

exemple : $x(t) = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(t)$



avec la fonction caractéristique.

$$1\!\!1_{[a,b]}(t-1) = 1\!\!1_{[a+1,b+1]}(t)$$

$$1\!\!1_{[a,b]}(-t) = 1\!\!1_{[-b,-a]}(t)$$

$$1\!\!1_{[a,b]}\left(\tfrac{t}{2}\right) = 1\!\!1_{[2a,2b]}(t)$$