NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 1/2

Partie 1 : Forme algébrique et conjugué (Rappels)

1) Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels.

Vocabulaire :
Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et la nombre b s'appelle la **partie imaginaire**. On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$.

2) Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$.

Méthode : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Vidéo https://youtu.be/qu7zGL5y4vI

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $3z - 6 = 4i + z$ b) $3z - 2 = \bar{z} + 1$ c) $z^2 + 5 = 0$

Correction

a) $3z - 6 = 4i + z$
$3z - z = 6 + 4i$
$2z = 6 + 4i$
$z = 3 + 2i$

b) On pose : $z = a + ib$. L'équation s'écrit alors :
$3(a + ib) - 2 = a - ib + 1$
$3a + 3ib - 2 - a + ib - 1 = 0$
$2a - 3 + 4ib = 0$

Donc : $2a - 3 = 0$ et $4b = 0$

Soit : $a = \frac{3}{2}$ et $b = 0$

D'où : $z = \frac{3}{2}$

c) $z^2 + 5 = 0$
$z^2 = -5$
$z^2 = 5i^2$
Donc : $z = i\sqrt{5}$ ou $z = -i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

3) Affixe

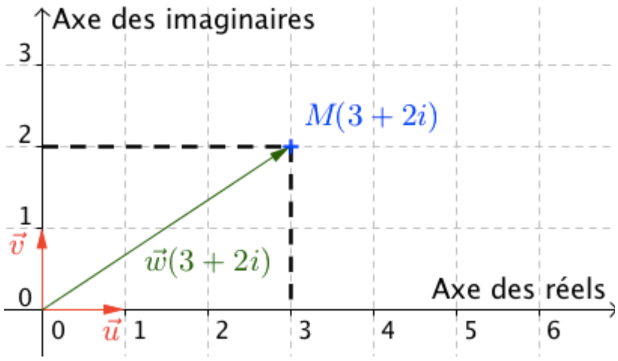
Définitions : a et b sont deux nombres réels.
- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a\,;b)$ et tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$.
- À tout point $M(a\,;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

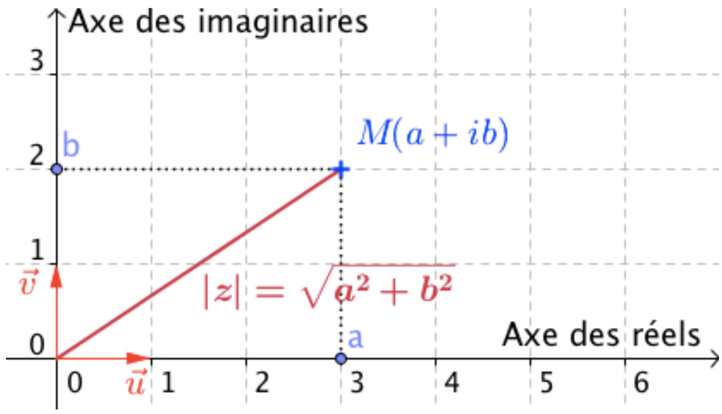
Le point $M(3\,;2)$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$.



4) Module d'un nombre complexe

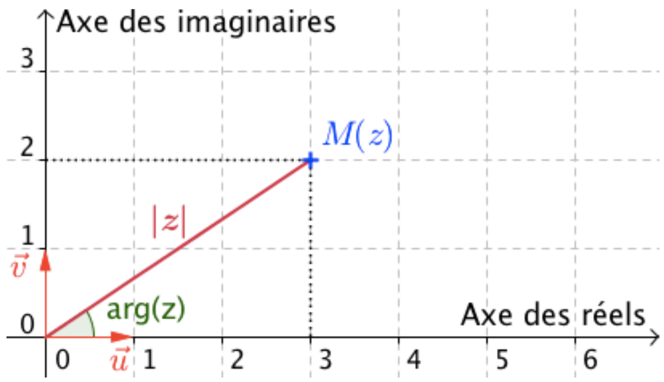
Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



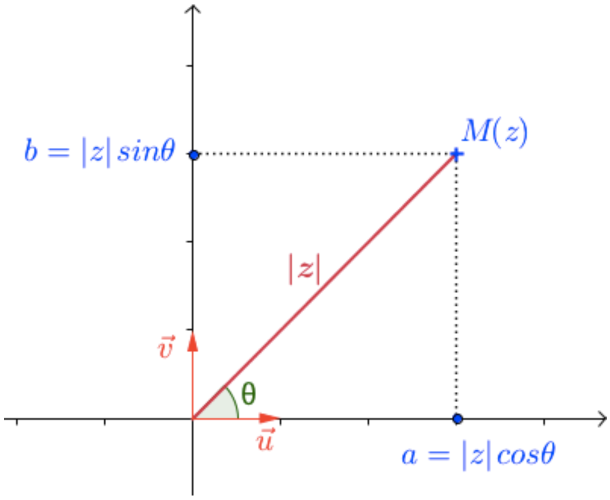
5) Argument d'un nombre complexe

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$, une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.



6) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta = arg\ (z)$.



Partie 2 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Définition

Définition : Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque :
$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration :
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \times 0 = -1$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples :

$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/WSW6DIbCS_0

Vidéo https://youtu.be/tEKJVKKQazA

Vidéo https://youtu.be/zdxRt5poJp0

1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -3$ c) $z_3 = \sqrt{3} - 3i$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

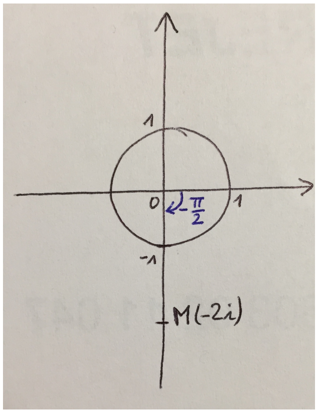
a) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Correction

1) a) - $|z_1| = |-2i| = |-2| \times |i| = 2 \times 1 = 2$

- Pour déterminer un argument de z_1, on peut utiliser le cercle trigonométrique.

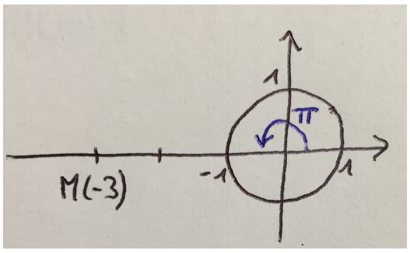
On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point M d'affixe z_1 et on lit graphiquement qu'un argument de z_1 est $-\frac{\pi}{2}$.



Ainsi, on a : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) - $|z_2| = |-3| = 3$

- On place le point M d'affixe z_2 et on lit graphiquement qu'un argument de z_2 est π.



Ainsi, on a : $z_2 = 3e^{i\pi}$.

c) $|z_3| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- Il n'est pas évident de déterminer graphiquement un argument de z_3. La méthode consiste alors à calculer $\frac{z_3}{|z_3|}$:

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z_3 tel que :

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme, on a :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'argument $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient. Et ainsi :

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Soit :

$$z_3 = |z_3|\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

2) $a)\ z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$b)\ z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels θ et θ',

a) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ c) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

d) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ f) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

Vidéo https://youtu.be/8EVfyqyVBKc

1) Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

a) iz b) $i\bar{z}$ c) $-\frac{2i}{z}$

Correction

1) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) a) $iz = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $i\bar{z} = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $-\frac{2i}{z} = \frac{2\times(-i)}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$