

Examen de traitement numérique du signal

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. La calculatrice et le téléphone portable sont interdits.

Pour rappel,

- $\frac{d}{dt} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) = \delta(t)$

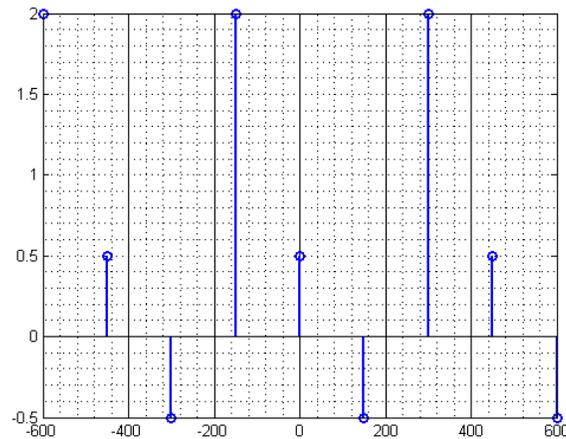


Figure 1: Signal périodique, x_n . Exercice 1

Exercice 1 On considère un signal x_n temps discret périodique représenté sur la figure 1.

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage et quelle est la période du signal ?
2. Déterminez numériquement les valeurs du signal.
3. Calculez l'autocorrélation en $t = 0$, notée $\gamma_x[0]$. Trouvez les entiers a, b, c, d tels que

$$\gamma_x[0] = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{12}$$

4. Calculez l'autocorrélation pour un retard d'un pas de temps notée $\gamma_x[1]$. Trouvez les entiers a, b, c, d tels que

$$\gamma_x[1] = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{12}$$

Solution :

```
Te=1.5e2;  
motif=[0.5 -0.5 2 ];  
tn=Te*(-1-length(motif):length(motif)+1);  
xn=[motif(end) motif motif motif(1:2)];  
figure(1); stem(tn,xn,'Linewidth',2); grid minor;
```

1. $T_e = 150$ s et donc $f_e = \frac{1}{150}$ Hz. La période est de $3T_e = 450$ s.
2. $x_0 = 0.5, x_1 = -0.5, x_2 = 2$.

3.

$$\gamma_x[0] = P_x = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 \right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{12}$$

4.

$$\gamma_x[1] = \frac{1}{3} (x_0 x_2 + x_1 x_0 + x_2 x_1) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{1}{12}$$

Exercice 2 On considère un signal x_n temps discret périodique de période $N = 4$, échantillonné à la fréquence $f_e = 10\text{Hz}$. Le signal x_n est défini par les valeurs

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = 1$$

On considère un filtre défini par sa relation entrée-sortie

$$y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} = x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}$$

1. Calculez le module de la transformée de Fourier en la fréquence $f_0 = 5\text{Hz}$ et montrez que l'on trouve la valeur de $\frac{1}{4}$.
2. Calculez le module de la réponse fréquentielle et montrez que

$$|\hat{H}(f)| = \sqrt{\frac{5 + 4 \cos(\frac{\pi f}{5})}{5 - 4 \cos(\frac{\pi f}{5})}}$$

3. Calculez le module de la transformée de Fourier de y_n en la fréquence $f_0 = 5\text{Hz}$ et montrez qu'elle vaut $\frac{1}{12}$.

Solution :

1. $N = 4$ et pour $k = 2$, $f_k = 5\text{Hz}$

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{4} \left(x_0 + x_1 e^{-j2\pi\frac{2}{4}} + x_2 e^{-j2\pi\frac{4}{4}} + x_3 e^{-j2\pi\frac{6}{4}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{-1}{4}$$

$$|\hat{X}_1| = \frac{1}{4}$$

2. La réponse fréquentielle est donnée par la relation entrée-sortie.

$$\hat{H}(f) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f T_e}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f T_e}} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi f}{5}}}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi f}{5}}}$$

$$|\hat{H}(f)| = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi f}{5}\right)\right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\pi f}{5}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi f}{5}\right)\right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\pi f}{5}\right)}}$$

$$|\hat{H}(f)| = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} + \cos\left(\frac{\pi f}{5}\right)}{\frac{5}{4} - \cos\left(\frac{\pi f}{5}\right)}}$$

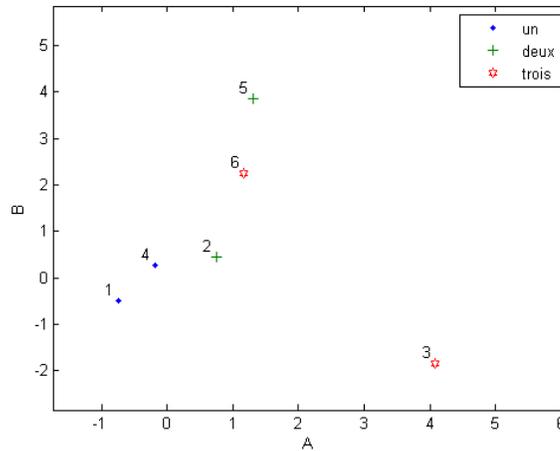


Figure 2: Visualisation des valeurs prises par les descripteurs pour chacun des six sons. Exercice 3

3. On constate d'abord que $|\hat{H}(f_0)| = \sqrt{\frac{5+4\cos(\frac{\pi f_0}{5})}{5-4\cos(\frac{\pi f_0}{5})}} = \frac{1}{3}$.

$$|\hat{Y}_1| = |\hat{H}(f_0)\hat{X}_1| = |\hat{H}(f_0)| |\hat{X}_1| = \frac{1}{12}$$

Exercice 3 On considère six sons numérotés de 1 à 6. Le véritable sens de chacun des sons est décrit $y_i \in \{1, 2, 3\}$: $y_i = 1$ signifie que le son i correspond au mot un, $y_i = 2$ correspond à deux et $y_i = 3$ correspond à trois. On suppose ici qu'après un traitement numérique complexe, on est parvenu à donner deux descripteurs A_i et B_i et à calculer leur valeur numérique pour chacun des sons (il s'agit ici pour chaque descripteur, d'une valeur pour l'ensemble du son). On considère ici comme technique de prédiction, la sélection du plus proche voisin au sens de la norme euclidienne en utilisant le descripteur A d'abord puis A et B ensuite. L'objet de cet exercice est de déterminer l'utilité des classifieurs obtenus. Le tableau suivant ainsi que la figure 2 montre les valeurs des descripteurs pour chaque son.

son	A	B	y
son 1	-0.74453	-0.49159	1
son 2	0.75253	0.43842	2
son 3	4.0884	-1.8468	3
son 4	-0.18372	0.2577	1
son 5	1.3006	3.8505	2
son 6	1.1719	2.2442	3

1. On utilise les trois premiers sons pour la base d'apprentissage et les trois sons suivants pour la base de test. Pour la classification, on considère ici que le descripteur A . Déterminez la prédiction de chaque son de la base de test. Déterminez la matrice de confusion, la sensibilité globale. Déterminez aussi la précision et le rappel pour chaque classe.
2. On utilise maintenant les deux descripteurs et on réalise une validation croisée en deux lots, calculez la sensibilité globale.

`y=[1:3 1:3]'` ;

`A=zeros(6,1); B=zeros(6,1);`

```

A(y==1)=-0.2+0.5*randn(2,1);
A(y==2)=0.2+randn(2,1);
A(y==3)=1+2*randn(2,1);
B(y==1)=1+randn(2,1);
B(y==2)=1.5+randn(2,1);
B(y==3)=3*randn(2,1);
for i=1:6
    ligne=['son ', num2str(i), ' & ', num2str(A(i)), ' & ', num2str(B(i)), ' & ', num2str(y(i))];
    disp(ligne),
end
figure(1);
plot(A(y==1), B(y==1), ' . ', A(y==2), B(y==2), ' + ', A(y==3), B(y==3), ' h ');
legend('un', 'deux', 'trois');
xlabel('A'), ylabel('B');
ea=0.04*(max(A)-min(A)); eb=0.04*(max(B)-min(B));
for i=1:6
    text(A(i)-ea, B(i)+eb, num2str(i));
end
axis([min(A)-1 max(A)+2 min(B)-1 max(B)+2]);

```

1. Les sons 4,5 et 6 font parti de la base de test.

$$\hat{x}_4 = 1, \hat{x}_5 = 2, \hat{x}_6 = 2$$

La matrice de confusion obtenue est alors

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La sensibilité globale OA = $\frac{C_{11}+C_{22}+C_{33}}{\sum_{ij} C_{ij}} = \frac{2}{3}$.

Pour la classe associée à *un*, $P_1 = \frac{C_{11}}{C_{11}+C_{21}+C_{31}} = 1$. $R_1 = \frac{C_{11}}{C_{11}+C_{12}+C_{13}} = 1$.

Pour la classe associée à *deux*, $P_2 = \frac{C_{22}}{C_{12}+C_{22}+C_{32}} = \frac{1}{2}$. $R_2 = \frac{C_{22}}{C_{21}+C_{22}+C_{23}} = 1$.

Pour la classe associée à *trois*, $P_3 = \frac{C_{33}}{C_{13}+C_{23}+C_{33}}$ n'est pas définie. $R_3 = \frac{C_{33}}{C_{31}+C_{32}+C_{33}} = 0$.

2. La validation croisée se fait d'abord en considérant pour la base d'apprentissage les trois premiers sons et pour la base de test les trois autres sons.

$$\hat{x}_4 = 1, \hat{x}_5 = 2, \hat{x}_6 = 2$$

Il y a ici deux bonnes prédictions, la sensibilité globale est donc : $OA_1 = \frac{2}{3}$.

Ensuite on considère les sons 4, 5 et 6 comme base d'apprentissage et les autres sons comme base de test.

$$\hat{x}_1 = 1, \hat{x}_2 = 1, \hat{x}_3 = 3$$

Il y a ici deux bonnes prédictions, la sensibilité globale est donc : $OA_2 = \frac{2}{3}$.

La sensibilité globale finale est donc égale à : $OA = \frac{1}{2}(OA_1 + OA_2) = \frac{2}{3}$.

Exercice 4 On considère un filtre \mathcal{H} défini par sa relation entrée-sortie

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad (1)$$

On cherche à déterminer deux filtres numériques \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 à partir de \mathcal{H} . La fréquence d'échantillonnage considéré pour ces filtres numériques est $f_e = \frac{1}{2}$ Hz.

1. Déterminez la relation entrée-sortie de \mathcal{H}_1 obtenu en appliquant la transformée bilinéaire sur \mathcal{H} , et montrez que l'on obtient

$$y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$$

2. Déterminez la relation entrée-sortie de \mathcal{H}_2 obtenu en appliquant l'invariant impulsionnel sur \mathcal{H} , et montrez que l'on obtient

$$y_n - e^{-4}y_{n-1} = x_n + e^{-4}x_{n-1}$$

Pour cet exemple, la transformation par invariant impulsionnel transforme un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ en un filtre de réponse impulsionnelle $h_n^\#$:

$$h_n^\# = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ T_e \frac{h(0)}{2} & \text{si } n = 0 \\ T_e h(nT_e) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Solution :

1. La fonction de transfert de \mathcal{H} est

$$H(p) = \frac{1}{2+p}$$

La fonction de transfert de \mathcal{H}_1 est

$$H_1(z) = H\left(\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = H\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{1+z^{-1}}{3+z^{-1}}$$

2. La réponse impulsionnelle $h(t)$ de \mathcal{H} est

$$h(t) = e^{-2t} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

Cela peut se justifier par exemple en considérant la transformée de Laplace de cette réponse impulsionnelle et en vérifiant que l'on obtient alors la fonction de transfert de \mathcal{H} .

L'invariant impulsionnelle donne alors cette réponse impulsionnelle pour \mathcal{H}_2 .

$$h_2[n] = 2e^{-4n} \mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n] - \delta_n$$

La fonction de transfert associée est alors :

$$H_2(z) = 2 \frac{1}{1 - e^{-4}z^{-1}} - 1 = \frac{1 + e^{-4}z^{-1}}{1 - e^{-4}z^{-1}}$$

```
fe=0.5;
ech_f=-5:1e-3:5;
p=j*2*pi*ech_f; H=1./(2+p);
ech_f1=fe*atan(pi*ech_f/fe)/pi;
z=exp(j*2*pi*ech_f1/fe); zinv=1./z;
H1=(1/3+1/3*zinv)./(1+1/3*zinv);
max(abs(H1-H)),
ech_f2=ech_f(abs(ech_f)<fe/2);
z=exp(j*2*pi*ech_f2/fe); zinv=1./z;
H2=(1+exp(-4)*zinv)./(1-exp(-4)*zinv);
H2_bis=zeros(1,length(ech_f2));
for k=-4e5:4e5
    p=j*2*pi*(ech_f2-k*fe);
    H2_bis=H2_bis+1./(2+p);
end
max(abs(H2-H2_bis)),
```