

Travaux dirigés de traitement d'images numériques

Séances 1, 2, 3

Institut Galilée

Convention

(53) Dans ce document la convention utilisée est de noter les images continues sous la forme d'une fonction à deux variables $g(x, y)$ et les images numériques sous la forme d'une suite à deux indices $g(m, n)$. Dans les deux cas le centre du repère est en haut à gauche, l'axe x ou m est vers le bas et l'axe y ou n est vers la droite. Ce choix de repère est spécifique à ce document, il a été fait pour être conforme aux TP¹ Les axes des fréquences spatiales sont notées u ou k et v ou l suivant que la variable fréquentielle est continue ou discrète. Le repère est centré sur le centre de l'image (ou en haut à gauche du spectre), l'axe u ou k est orienté vers le bas et l'axe v ou l est orienté vers la droite. Dans ce document, on n'a pas cherché à adapter la transformée de Laplace ou la transformée en

¹Si l'on avait choisi d'avoir l'axe x ou m vers la droite et l'axe y ou n vers le bas, cela aurait amené deux conséquences particulières. Une image en niveaux de gris ou le masque d'un filtre sont deux tableaux mais l'ordre des éléments de ces tableaux n'aurait pas été celui qu'on utilise pour les matrices ainsi $g(0, 1)$ aurait désigné la deuxième ligne et la première colonne. Il aurait donc fallu éviter de faire un produit matriciel. Autre difficulté, la description des objets dans une image et leur déplacement amène à utiliser la notion de rotation qui utilise la notion d'angle orienté. Le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre, il correspond au fait de se déplacer le long d'un cercle en ayant sa main gauche à l'intérieur et sa main droite à l'extérieur. Le repère choisit n'aurait pas été un repère direct, c'est-à-dire que la rotation de l'axe x ou m vers l'axe y ou n n'aurait pas été dans le sens direct. En conséquence l'écriture matricielle d'une rotation aurait dû utiliser l'angle opposé.

Z en traitement d'image. Du coup il n'est plus nécessaire d'avoir une notation distincte pour la transformée de Fourier et celle-ci est notée $G(u, v)$ au lieu de $\widehat{G}(u, v)$.

1 Séance 1

1.1 Images continues infinies et transformations

Cours 1 (35) *On appelle une image continue infinie une fonction $g(x, y)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose ici que le repère est centré en haut à gauche de l'image et que l'axe x est vers le bas et y est vers la droite.*

Dans les trois premières questions de l'exercice qui suit, on s'intéresse à des images n'ayant que deux teintes : noir et blanc. Et pour de telles images, il est intéressant de faire le lien entre une image et les ensembles de points d'un graphe ayant telle teinte. On peut ainsi décrire une image de ce type en déterminant tous le lieu des points qui sont blancs (les autres sont alors noirs). Par exemple l'image décrite par l'équation suivante est une bande horizontale de largeur 1.

$$g(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

En effet tous les points (x, y) pour lesquels $x \geq 0$ et $x \leq 1$ vérifient $g(x, y) = 1$ et sont l'ensemble des points blancs de cette image.

Pour décrire une image, il est intéressant d'ajouter un nouvel outil consistant à faire l'intersection ou l'union d'ensemble de points. Ici l'opération multiplication et addi-

tion sont utilisées en fait pour faire l'intersection et la réunion de deux ensembles. La multiplication s'interprète comme un ET. L'addition s'interprète comme un OU. Plus précisément, supposons que l'on utilise deux images en noir et blanc décrite par $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$.

- On obtient une nouvelle image où les points blancs sont ceux qui sont À LA FOIS blancs pour $g_1(x, y)$ ET pour $g_2(x, y)$ en procédant à une multiplication de $g_1(x, y)$ par $g_2(x, y)$.

$$g_A(x, y) = g_1(x, y)g_2(x, y)$$

- On obtient une nouvelle image où les points blancs sont ceux qui sont OU BIEN blancs pour $g_1(x, y)$ OU BIEN blanc pour $g_2(x, y)$ en procédant à une addition de $g_1(x, y)$ par $g_2(x, y)$.

$$g_B(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y) - g_1(x, y)g_2(x, y)$$

Le terme retranché permet de garantir que $g_B(x, y)$ vaut soit 0 soit 1. On peut tout à fait se contenter de mettre $g_B(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y)$ mais dans ce cas $g_B(x, y)$ vaut parfois 2 et on utilise le fait que dès que la valeur est plus grande que 1, on affiche en blanc.

Dans l'exercice qui suit, il est demandé de représenter l'image dans le domaine $[-1, 4] \times [-1, 4]$. En fait cette information ne modifie pas l'image, elle modifie juste la représentation. On

peut donc tout à fait discuter d'un point qui ne vérifierait pas la condition $x \in [-1, 4]$ et $y \in [-1, 4]$ dans le sens que ce point a bien une teinte noire ou blanche mais on ne la représente pas sur le graphe. La notion de domaine sur lequel on représente une image est différente de la notion mathématique de domaine de définition : pour nous une image (ou un signal) est défini pour toutes les valeurs réelles possibles tandis qu'en mathématique, on interdit parfois certaines valeurs et le domaine de définition signifie les valeurs non-interdites.

Exercice 1 (35) *Représentez graphiquement les images suivantes pour $x, y \in [-1, 4]$:*

$$1. g(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,2]}(y)$$

$$2. g(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{[0,2]}(y)$$

$$3. g(x, y) = \delta(x)\mathbf{1}_{[0,2]}(y)$$

$$4. g(x, y) = \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \frac{1}{2}$$

En combinant les fonctions $\mathbf{1}_{[0,3]}(x)$, $\mathbf{1}_{[1,2]}(x)$, $\mathbf{1}_{[0,3]}(y)$, $\mathbf{1}_{[1,2]}(y)$, construisez une fonction qui représente une croix entourée d'une bordure noire.

Cours 2 (36)

Lorsqu'on transforme une image définie par $g_1(x, y)$ en une autre définie par $g_2(x, y)$, sa fonction se trouve ainsi transformée :

$$g_2(x, y) = g_1(x'_{\frac{4}{4}}(x, y), y'(x, y)) \quad (1)$$

- Pour une translation $t(t_x, t_y)$, la nouvelle image

$$\begin{cases} x'(x) = x - t_x \\ y'(y) = y - t_y \end{cases} \quad (2)$$

- Pour une rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle θ

$$\begin{cases} x'(x) = x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta) \\ y'(y) = x \sin(-\theta) + y \cos(-\theta) \end{cases} \quad (3)$$

- Pour une homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport $a > 0$

$$\begin{cases} x'(x) = \frac{x}{a} \\ y'(y) = \frac{y}{a} \end{cases} \quad (4)$$

On peut remarquer que pour toutes les transformations, il faut utiliser la transformation inverse en effet dans cette formulation on modifie la façon de représenter un emplacement dans un repère. Dans la pratique, on peut soit retenir que les formules doivent être inversées, soit retenir que les formules peuvent être inversées et tester un point particulier.

Exercice 2 (36)

1. Représentez graphiquement l'image $g_1(x, y) = 0.5 \cos(\pi x) + 0.5$ sur $[0, 2] \times [0, 2]$.
2. Quelle est la transformation liant $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y) = 0.5 \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(x + y)) + 0.5$

3. Quelle est la transformation liant $g_2(x, y)$ et $g_3(x, y) = 0.5 \cos(\pi(x + y)) + 0.5$
4. Représentez graphiquement l'image $g_3(x, y)$ sur $[0, 2] \times [0, 2]$.

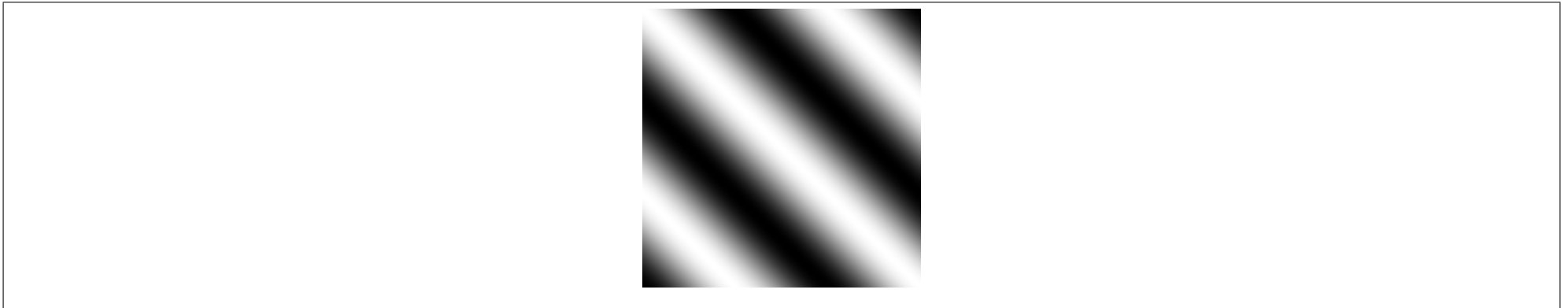


Figure 1: images de l'exercice 3

Exercice 3 (40) On considère l'image représentée par la figure 1 pour $x, y \in [0, 1]$. Trouvez les coefficients a, b, c, d pour que cette fonction corresponde à cette image.

$$g(x, y) = a \cos(bx + cy) + d$$

1.2 Transformée de Fourier continue

Cours 3 (37)

- La transformée de Fourier bidimensionnelle est définie par

$$G(u, v) = \mathcal{T}F_y [\mathcal{T}F_x [g(x, y)]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Le repère correspondant à u et v est au centre de l'image avec l'axe u vers la droite et l'axe v vers le bas.

- *Le module $|G(u, v)|$ est symétrique par rapport à $(u, v) = (0, 0)$:*

$$|G(u, v)| = |G(-u, -v)|$$

- *Une propriété importante (et un peu surprenante au début) est que quand une image est séparable, c'est-à-dire le produit d'une quantité dépendant de x et d'une quantité dépendant de y , sa transformée de Fourier est le **produit** (et non le produit de convolution) de la transformée de Fourier de cette quantité dépendant de x et de la transformée de Fourier de cette autre quantité dépendant de y .*

$$g(x, y) = g_1(x)g_2(y) \quad \Rightarrow \quad G(u, v) = G_1(u)G_2(v) \quad (5)$$

où $G_1(u)$ et $G_2(v)$ sont les transformées de Fourier de $g_1(x)$ et $g_2(y)$.

- *Une conséquence de l'équation (5), est qu'il est possible d'avoir une transformée de Fourier qui dépende du produit de $\delta(u - u_0)$ par $\delta(v - v_0)$, cette transformée de Fourier est représentée par un point dans un graphe 2D dépendant de u et de v , ce point est localisé en (u_0, v_0) et la convention consiste à noter le produit de ces deux Diracs ainsi :*

$$\delta(u - u_0)\delta(v - v_0) = \delta(u - u_0, v - v_0) \quad (6)$$

En revanche le produit de Diracs n'est pas défini en général.

- *Comme en traitement du signal, la transformée de Fourier à utiliser, dépend de ce que g est continu/discret, périodique/non-périodique.*

Exercice 4 (37)

1. *Calculez la transformée de Fourier de $g_1(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,2]}(y)$ et représentez graphiquement son module pour $u, v \in [0, 2]$, par exemple en traçant les lignes joignant les fréquences pour lesquelles le module est nul, est maximal ou vaut approximativement la moitié du maximum.*
2. *Calculez la transformée de Fourier de $g_2(x, y) = \cos(\pi x)$ et représentez graphiquement son module pour $u, v \in [0, 2]$.*
3. *Calculez la transformée de Fourier de $g_3(x, y) = \cos(\pi x)\delta(y)$ et représentez graphiquement son module pour $u, v \in [0, 2]$.*

Cours 4 (38)

Lorsque $g_1(x, y)$ est transformée en $g_2(x, y)$, la transformée de Fourier $G_2(u, v)$ est aussi transformée :

- *Pour une translation t_x, t_y*

ce qui est le cas quand $g_2(x, y) = g_1(x - t_x, y - t_y)$, au sens où l'équation (1) transforme $g_1(x, y)$ en $g_2(x, y)$ pour $x' = x - t_x$ et $y' = y - t_y$ qui est la définition de la translation inversée donnée en équation (2). On a alors

$$G_2(u, v) = G_1(u, v)e^{-j2\pi(ut_x + vt_y)}$$

- Pour une rotation d'angle θ et de centre $(0, 0)$

ce qui est le cas quand $g_2(x, y) = g_1(x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta), x \cos(-\theta) + y \sin(-\theta))$ au sens où l'équation (1) transforme $g_1(x, y)$ en $g_2(x, y)$ pour $x' = x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta)$ et $y' = x \cos(-\theta) + y \sin(-\theta)$ qui est la définition de la rotation inversée donnée en équation (3).

On a alors

$$G_2(u, v) = G_1(u \cos(-\theta) - v \sin(-\theta), u \sin(-\theta) + v \cos(-\theta))$$

qui est obtenue en appliquant une équation similaire à (1) définie par

$$G_2(u, v) = G_1(u'(u, v), v'(u, v))$$

où la transformation $(u, v) \rightarrow (u', v')$ est la même rotation définie par

$$\begin{cases} u' = u \cos(-\theta) - v \sin(-\theta) \\ v' = u \sin(-\theta) + v \cos(-\theta) \end{cases}$$

- Pour une homothétie de rapport a et de centre $(0, 0)$

ce qui est le cas quand $g_2(x, y) = g_1\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$ au sens où l'équation (1) transforme $g_1(x, y)$ en $g_2(x, y)$ pour $x' = \frac{x}{a}$ et $y' = \frac{y}{a}$ qui est la définition de l'homothétie inversée donnée en équation (4). Il y a alors deux possibilités suivant que le caractère périodique de l'image.

- Si l'image est **non-périodique**, alors il y a rétrécissement du spectre **avec amplification**.

$$G_2(u, v) = aG_1(au, av)$$

- Si l'image est **périodique**, alors il y a rétrécissement du spectre **sans amplification**.

$$G_2(u, v) = G_1(au, av)$$

Exercice 5 (38) Calculez de deux façons différentes la transformée de Fourier de $g(x, y) = \frac{1}{2} \cos(\pi(x + y)) + \frac{1}{2}$, représentez la graphiquement. La première méthode consiste en utilisant l'identité $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, à développer l'expression et à utiliser l'équation (5) ainsi que la notation (6). La deuxième méthode consiste à suivre l'exercice 2 (p. 4).

1.3 Echantillonnage

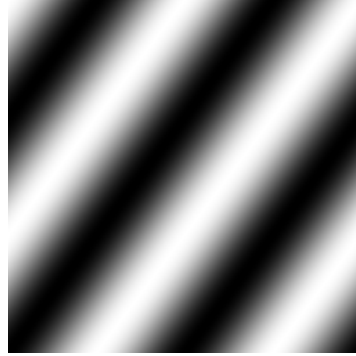


Figure 2: image de l'exercice 5

Cours 5 (39) *On appelle image discrète une image définie par une suite à deux indices notée g_{mn} ou $g(m, n)$. Le repère est en haut à gauche de l'image, m est orienté vers le bas et n vers la droite.*

L'échantillonnage d'une image continue $\tilde{g}(x, y)$ est une image discrète définie par

$$g(m, n) = \tilde{g}(m\Delta x, n\Delta y)$$

Le critère de Shannon-Nyquist affirme que l'on peut retrouver $\tilde{g}(x, y)$ à partir de $g(m, n)$ dès lors que la partie non-nulle du spectre de \tilde{g} est contenu dans $|u| < \frac{1}{2\Delta x}$ et $|v| < \frac{1}{2\Delta y}$. La transformée de Fourier de l'image échantillonnée $g(m, n)$ est

$$G(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{k,l} \tilde{G} \left(u - \frac{k}{\Delta x}, v - \frac{l}{\Delta y} \right)$$

Le repère u, v est centré au milieu de l'image et u est orienté vers la droite v est orienté vers le bas.

Exercice 6 (39) *On analyse les problèmes de sous-échantillonnage, repliement de spectre et préfiltrage à partir du signal $g(x, y) = 0.5 + 0.5 \cos(2\pi(3x + 4y))$ échantillonnée $\Delta x = \Delta y = 0.2$. La figure 2 montre cette image non-échantillonnée pour $x, y \in [0, 1]$.*

- 1. Que vaut le signal échantillonné $g_e(m, n)$ lorsqu'on se restreint à 256×256 points ? Quel est le lien entre $g_e(m, n)$ et l'image montrée sur la figure 2 ?*
- 2. Quel est le spectre de $g(x, y)$ (i.e. avant échantillonnage) ? Proposez une solution et vérifiez cette solution en utilisant la transformée de Fourier inverse. Représentez où se trouvent ces pics à partir de leur coordonnées en $(u, v) \in [-5, 5]$.*
- 3. Le critère de Nyquist est donné ici par $|u| \leq \frac{1}{2\Delta x}$ et $|v| \leq \frac{1}{2\Delta y}$. Tracer le domaine correspondant à ce critère de Nyquist. Est-ce que ce critère est vérifié ?*
- 4. Donnez l'expression du spectre de l'image échantillonnée $G_e(u, v)$ et représentez le résultat. Pour cela il suffit de tracer les symétries centrales en les quatre extrémités du critère de Nyquist. Justifiez cette construction géométrique.*
- 5. Pour retrouver l'image continue à partir de l'image échantillonnée, il suffit normalement de filtrer l'image avant échantillonnage par un filtre dont la réponse en fréquence est $H(u, v) = \mathbf{1}_{[-2.5, 2.5]}(u)\mathbf{1}_{[-2.5, 2.5]}(v)$. Expliquez d'où vient le nombre 2.5 ? Quels sont les pics du spectre initial qui sont conservés ?*

6. *Calculez l'expression du spectre de l'image filtrée avant échantillonnage $G_h(u, v)$.*
7. *En déduire l'image filtrée avant échantillonnage $G_h(x, y)$.*

2 Séance 2

2.1 Filtrage

Cours 6 *De la même façon qu'en traitement du signal un filtre linéaire temps invariant est défini par une réponse impulsionnelle, en traitement d'image un filtre linéaire est défini par son masque qui est une matrice dont les composantes sont $h(m, n)$. L'application d'un filtre sur une image se fait en appliquant un produit de convolution sur l'image :*

$$g'(m, n) = h(m, n) * g(m, n) = \sum_{k,l} h(m - k, n - l)g(k, l)$$

où $g(m, n)$ est l'image avant l'application du filtrage et $g'(m, n)$ est l'image transformée par l'application du filtrage.

*En pratique, cette formule est appliquée en renumérotant les composantes de la matrice correspondant au masque de façon à avoir autant de composantes avec des indices négatifs que des indices positifs. Dans le cadre de ce cours, on adopte la convention d'entourer d'un carré la composante du centre qui est d'indice nul à la fois verticalement et horizontalement.*² *Par exemple le filtre de masque*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

²Cette convention est parfois utilisée pour faciliter l'enseignement, elle est plus rarement utilisée dans une documentation technique.

correspond en fait à

$$\begin{aligned} h(-1, -1) &= 0 & h(-1, 0) &= 1 & h(-1, 1) &= 0 \\ h(0, -1) &= 1 & h(0, 0) &= 0 & h(0, 1) &= 1 \\ h(1, -1) &= 0 & h(1, 0) &= 1 & h(1, 1) &= 0 \end{aligned}$$

Si on intervertit les indices négatifs avec les indices positifs, on peut voir l'application du filtrage comme le fait de positionner le centre (i.e. entouré d'un carré) du masque sur un pixel et remplacer la valeur du pixel par la somme des produits terme à terme entre les coefficients du masque et les valeurs des pixels désignés par le masque.

Pour illustrer cette notion, on applique ce filtre sur l'image définie par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

On remarque que dans cet exemple, le filtre n'est pas modifié en changeant le signe des indices (symétrie des coefficients). Le résultat du filtrage est alors

$$\begin{bmatrix} h(0, 1)b + h(1, 0)c & h(0, -1)a + h(1, 0)d \\ h(-1, 0)a + h(0, 1)d & h(0, -1)c + h(-1, 0)b \end{bmatrix}$$

Pour les masques dont la taille n'est pas impaire, le choix du centre est dans une certaine mesure arbitraire mais cet arbitraire n'a pas un impact visible sur le rendu. De plus l'étape consistant à changer le signe des indices est parfois oubliée car elle non plus n'a pas forcément un impact déterminant.

Pour simplifier on distingue les filtres utilisés pour lisser et les filtres utilisés pour réhausser les contours. Pour les premiers, la somme des composantes du masque est égale à 1 et le filtre est un passe-bas³, tandis que pour les seconds, la somme des composantes du masque est égale à 0.

Exercice 7 (41) *On se donne une image définie par :*

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

1. *Calculez l'image obtenue en appliquant le filtre de masque*

$$h_{m,n} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

2. *Calculez l'image obtenue en appliquant le filtre défini par :*

$$[h_{m,n}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

³Ceci est tout à fait similaire à ce qui se fait en traitement du signal, ici cette contrainte sur la somme des composantes du masque entraîne que la réponse fréquentielle en la fréquence nulle soit égale à 1 et par suite que le niveau de gris moyen de l'image filtrée soit le même que le niveau de gris de l'image avant filtrage et qu'ainsi le filtrage n'entraîne ni assombrissement ni éclaircissement de l'image.

Cours 7 *Un filtre est dit séparable si le masque est le produit matriciel d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne. Par exemple le filtre de Sobel suivant est séparable*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1]$$

Cette multiplication est ici au sens du produit matriciel.

Quand un filtre est séparable, il est équivalent au fait de filtrer l'image avec d'abord le masque correspondant au vecteur colonne puis en appliquant le masque correspondant au vecteur ligne.

Un filtre est séparable quand son masque est de rang 1 au sens de l'algèbre linéaire⁴. Il est aussi possible de le déterminer en cherchant s'il est possible de trouver ce vecteur colonne et ce vecteur ligne.

Exercice 8 (43) *On considère un certain nombre de transformations d'une image en une image. Trouvez les masques correspondant à ces transformations et précisez si ces masques sont séparables.*

1. *On décale l'image de deux colonnes vers la droite et d'une ligne vers le bas.*

⁴Pour un opérateur linéaire f , le rang est la dimension du sous-espace linéaire engendré par $f(x)$ où x est un vecteur de l'espace de départ.

2. *A partir de l'image de départ notée A, on forme une nouvelle notée B qui est décalée vers le bas d'une ligne. On forme l'image transformée en retranchant terme à terme à l'image A, l'image B.*
3. *Pour chaque pixel, on considère son voisin au dessus, en dessous, à gauche et à droite. On forme l'image transformée en remplaçant la valeur de chaque pixel par la moyenne de ses quatre voisins.*

2.2 Réponse fréquentielle

Cours 8 (42)

Les filtres de Sobel sont définis par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \boxed{0} & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & \boxed{0} & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cours 9 (42)

Comme en traitement du signal, la réponse fréquentielle d'un filtre est la transformée de Fourier du masque. Et comme ce masque ne peut être considéré comme périodique, la transformée de Fourier à utiliser est l'équivalent d'une transformée de Fourier à temps discret.

La transformée de Fourier d'une suite bidimensionnelle non-périodique est une fonction périodique de période égale à 1 suivant u et aussi suivant v , elle est définie par

$$\mathcal{TF}[g(m, n)](u, v) = \sum_{m, n} g(m, n) e^{-j2\pi(mu+nv)} \quad (8)$$

La transformée de Fourier inverse est définie par

$$\mathcal{TF}^{-1}[G(u, v)]_{mn} = \int_{u=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{v=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(u, v) e^{j2\pi(mu+nv)} du dv \quad (9)$$

Un filtre est un passe-bas lorsque sa transformée de Fourier est plus élevée pour les basses fréquences.

Exercice 9 (Réponse fréquentielle du Sobel) (42) *On considère la réponse fréquentielle représentée sur la figure 3. Cherchez à quel filtre de Sobel correspond cette réponse fréquentielle et calculez cette réponse fréquentielle.*

2.3 Transformée de Fourier d'une image discrète

Cours 10 (44)

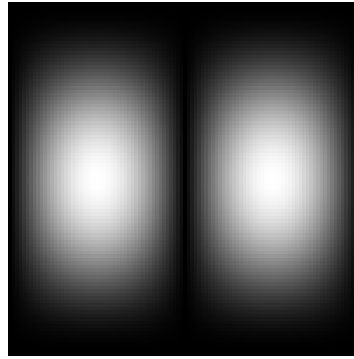


Figure 3: Module d'une réponse fréquentielle d'un des filtres de Sobel. Le centre du repère est au centre de l'image et l'axe u est horizontal vers la droite, l'axe v est vertical vers le haut.

La transformée de Fourier adaptée aux images est la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle :

$$G(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{m,n} e^{-j2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})}$$

où $g(m, n)$ est l'intensité du pixel à la position (m, n) et $G(k, l)$ est le coefficient associé à la fréquence dont la composante verticale u est $\frac{k}{M}$ et la composante horizontale v est $\frac{l}{N}$. Ces formules pour les fréquences u et v correspondent à des fréquences réduites. Les variables associées aux fréquences spatiales sont notées u et v . La taille de l'image est $M \times N$. Le choix du coefficient $\frac{1}{MN}$ est dans une certaine mesure arbitraire, il garantit ici que la composante constante $G(0, 0)$ est la moyenne du signal image. Cette fois-ci le repère kl est centré en haut à gauche de l'image et il faut modifier l'échelle des fréquences

pour avoir une représentation centrée.

On exprime parfois aussi les fréquences de la transformée de Fourier d'une image en cycle par images : la composante horizontale $\frac{k}{M}$ devient k cycles par image et la composante verticale $\frac{l}{N}$ devient l cycles par image.

Exercice 10 (44)

On considère une image de taille 4×4 définie par

$$g_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

- 1. Montrez que les coefficients de la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle sont la somme de deux termes, chacun correspondant à une exponentielle complexe.*
- 2. Calculez le module et l'argument de chacun de ces coefficients.*
- 3. Calculez les fréquences spatiales de chaque coefficient suivant les deux types d'échelles fréquentielles (celle en fréquences réduites et provenant du traitement du signal et celle en cycles par image), on pourra présenter ces fréquences spatiales sous la forme de deux matrices $[u_{k,l}]$ et $[v_{k,l}]$.*

Cours 11 (45)

La transformée de Fourier d'une image numérique $G(k, l)$ de taille $M \times N$ est transformée en $G'(k, l)$ lorsque l'image est filtrée par le filtre de réponse fréquentielle $H(u, v)$ en considérant cette image périodique, c'est-à-dire que l'on prend soin de compléter les éléments manquant de l'image par les valeurs situées de l'autre côté de l'image.

$$G'(k, l) = H\left(\frac{k}{M}, \frac{l}{N}\right) G(k, l) \quad (11)$$

Exercice 11 (45)

On considère une image $g(m, n)$ définie par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et un filtre $h(m, n)$ défini par le masque

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. *Calculez la transformée de Fourier $G(k, l)$*
2. *Appliquez le filtre $h(m, n)$ sur l'image $g(m, n)$, en veillant à prenant soin de l'orientation du masque.*

3. Appliquez le filtre $h(m, n)$ sur l'image $g(m, n)$ en supposant que $g(m, n)$ est en fait périodique, le résultat est noté $g'(m, n)$. Remarquez que dans cet exemple une translation d'une image périodique est en fait une circulation des composantes de l'image.
4. Calculez la transformée de Fourier $G'(k, l)$
5. Retrouvez la relation (11).

Exercice 12 (46) On considère un filtre $h(m, n)$ dont le masque est défini par

$$\begin{bmatrix} \boxed{a} & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Trouvez les coefficients a, b, c, d de manière à ce que la réponse fréquentielle vérifie les conditions suivantes

1. $H(0, 0) = 1$ et $H(0, \frac{1}{2}) = H(\frac{1}{2}, 0) = H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$
2. $H(0, 0) = H(0, \frac{1}{2}) = H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ et $H(\frac{1}{2}, 0) = 0$

3 Séance 3

3.1 Seuillage et segmentation

Cours 12 (47)

La figure 4 représente le tableau d'un jeu d'échec. Lorsqu'on se pose la question de répartir les pixels en plusieurs catégories, il vient deux réponses très différentes.

- Un premier point de vue consiste à regrouper les pixels blancs et les pixels noirs.*
- Un deuxième point de vue consiste à regrouper les pixels qui forment chacune des 64 cases du tableau.*

Les deux traitements portent le nom de segmentation mais le deuxième correspond à une segmentation en région tandis que le premier peut aussi s'exprimer comme un partition des pixels en sous-ensembles disjoints. Le premier point de vue est techniquement plus simple à réaliser. Dans l'exemple de la figure 4, il suffit de seuiller les pixels. Concrètement cela veut dire qu'on place les pixels dans une catégorie ou dans l'autre suivant que la valeur d'un pixel est inférieur ou supérieur à une certaine valeur.

$$\begin{cases} \text{un pixel est de type A si } g \geq 0.5 \\ \text{un pixel est de type B si } g < 0.5 \end{cases}$$

C'est le deuxième point de vue qui nous intéresse ici. Il a des applications diverses (reconnaissance d'objet, amélioration de la qualité d'une image). Pour définir ce deuxième point de vue, on utilise la notion de voisinage.

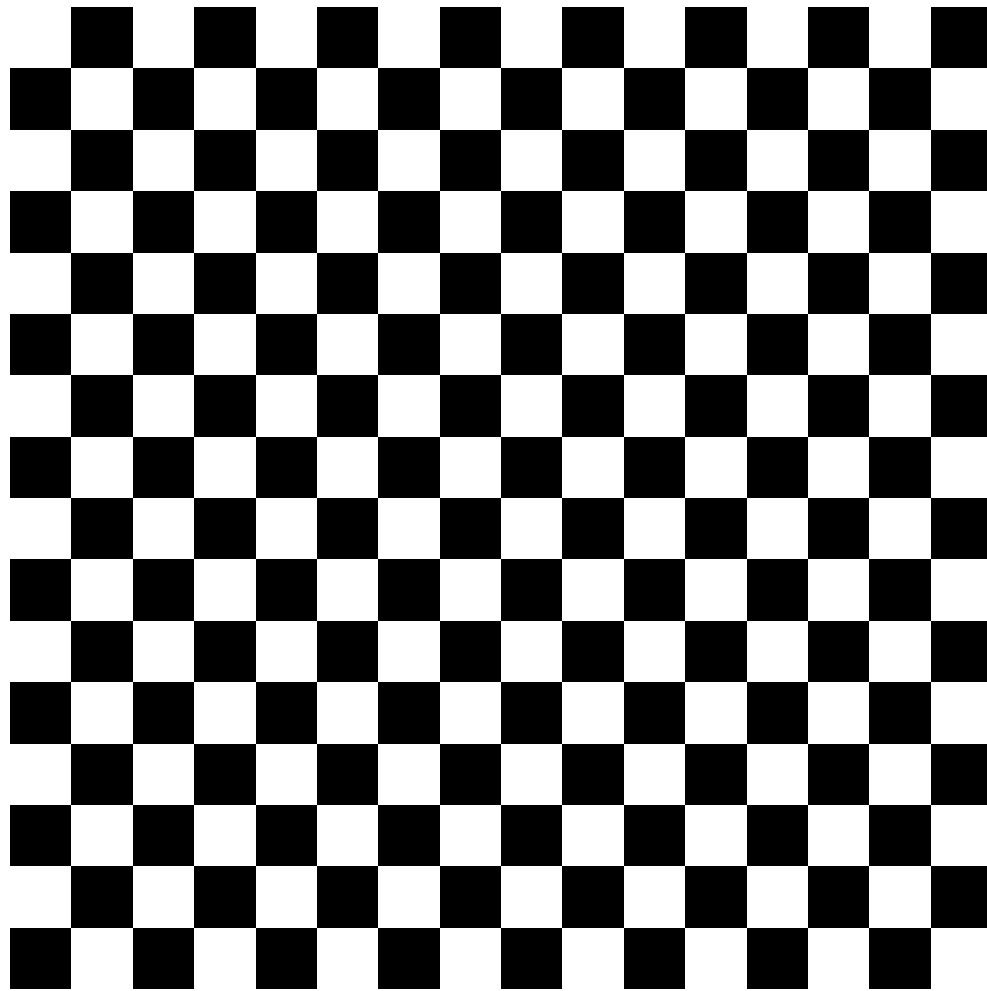


Figure 4: Image d'un jeu d'échec. Cours 12

Ici on considère deux définitions de voisinage.

- *Deux points sont voisins au sens de la 4-connexité si l'un est le voisin du dessous, de gauche, de droite ou de dessus.*
- *Deux points sont voisins au sens de la 8-connexité si l'un est le voisin du dessous, de gauche, de droite ou de dessus, ainsi que d'en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite.*

Par exemple sur la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (12)$$

5 a 4 voisins en 4-connexité : 2, 6, 8, 4. 5 a 8 voisins en 8-connexité : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

On peut définir la segmentation en région de la façon suivante.

$$\text{un pixel est de type A si } \begin{cases} s_0 \leq g \leq s_1 \\ \text{le pixel est voisin d'un pixel de type A} \end{cases} \quad (13)$$

On formule cette caractérisation de ces pixels en disant qu'il s'agit de la région connexe vérifiant $s_0 \leq g \leq s_1$.

Par exemples les différentes cases du tableau représentés sur la figure 4 représentent bien 64 régions connexes distinctes en 4-connexité mais non en 8-connexité.

Exercice 13 ⁽¹⁶⁾ *On se donne une deuxième image définie par*

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.2 \\ 0.8 & 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

1. *Choisissez deux seuils de telle façon que l'image seuillée avec ces deux seuils fournissent trois régions connexes (4-connexité ici).*

3.2 Quantification sur n bits

Cours 13 ⁽⁴⁹⁾ *On appelle la quantification d'une image sur n bits, le fait de représenter les valeurs de chaque pixel sur n bits et donc sur 2^n valeurs réparties uniformément entre 0 et 255 ou entre 0 et 1.*

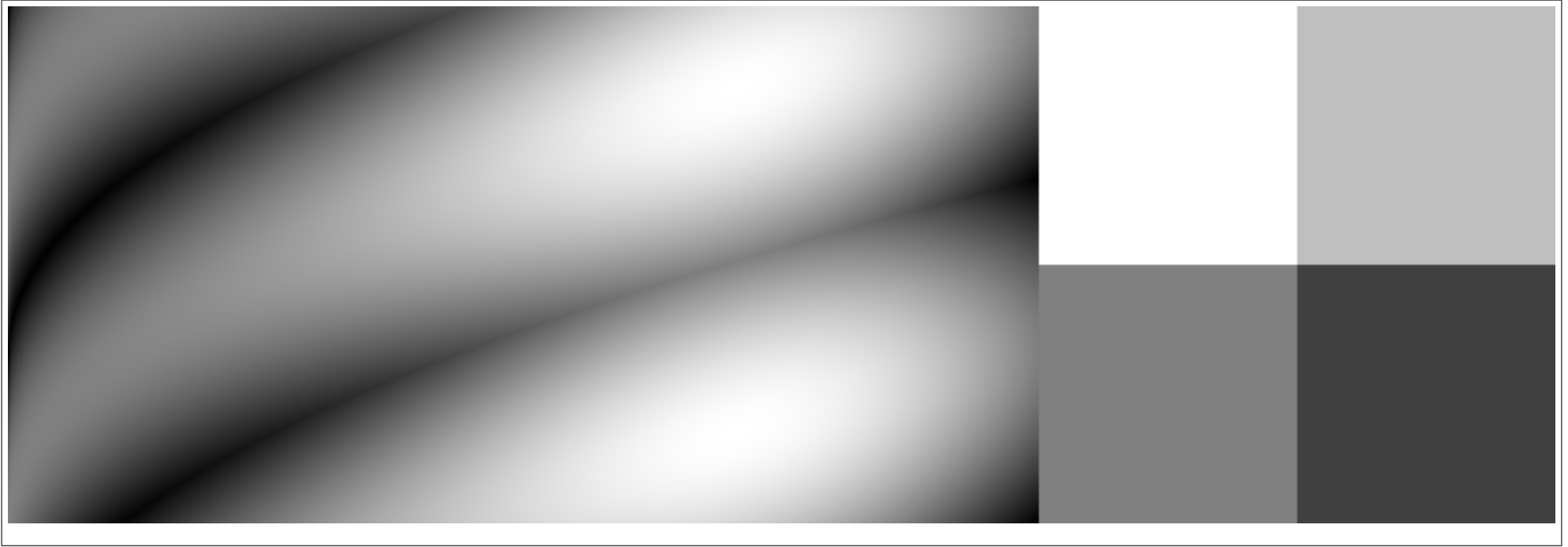


Figure 5: image de l'exercice 14 et à carrés de niveaux de gris égaux à 255, 191, 127, 64.

Exercice 14 (49) *Tracez sur l'image les contours de l'image quantifiées sur 1 et sur 2 bits.*

3.3 Histogramme

Cours 14 (50) *On appelle histogramme la courbe traçant le nombre de pixels ayant telle valeurs en fonction de ces valeurs.*

On appelle égalisation d'histogramme, le fait de construire une table de correspondance telle lorsqu'on remplace les valeurs des pixels par les valeurs correspondantes sur la table de correspondance, l'image a un histogramme plat.

Exercice 15 ⁽⁵⁰⁾ *On considère l'image décrit par la matrice suivante :*

$$\begin{bmatrix} 176 & 39 & 28 & 22 & 47 & 141 & 103 & 107 & 87 \\ 191 & 211 & 246 & 102 & 68 & 37 & 20 & 13 & 230 \\ 115 & 138 & 2 & 67 & 38 & 218 & 62 & 231 & 95 \\ 22 & 255 & 198 & 205 & 35 & 159 & 32 & 241 & 29 \\ 59 & 20 & 209 & 111 & 222 & 90 & 47 & 126 & 199 \\ 233 & 113 & 222 & 233 & 148 & 131 & 62 & 125 & 100 \end{bmatrix}$$

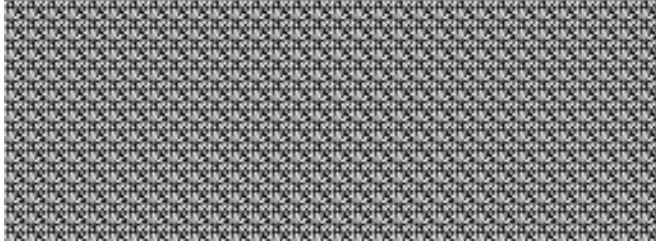
1. *Tracez les histogrammes de cette image, une fois quantifiée en 1, 2 et 3 bits.*
2. *Calculez l'image quantifiée sur 3 bits et construisez une table de correspondance de façon que l'image obtenue ait un histogramme constant.*

Exercice 16 ⁽⁵¹⁾ *On considère un certain nombre de transformations, dites si elles sont susceptibles de changer l'histogramme et quand c'est possible dites comment l'histogramme est affecté. Pour montrer qu'il n'est pas possible de répondre de façon générale considérez des images simples et montrant que la façon dont l'histogramme est modifié dépend de l'image. On considère une image de taille $M \times N$ à valeurs sur $0 \dots 255$.*

1. *Les valeurs des pixels sont augmentées de 10 unités et les valeurs entre 246 et 255 sont transformées en 255.*
2. *On déplace tous les pixels de deux cases à droite et d'une case à gauche. Les pixels de l'avant dernière colonne sont déplacés vers la première colonne, ceux de*

la dernière colonne sont déplacés sur la deuxième colonne. Ceux de la dernière ligne sont mis sur la première ligne.

- 3. Pour chaque pixel, on considère ses 8 voisins, on calcule la valeur maximal de ce pixel et de ses 8 voisins et dans la nouvelle image, on affecte à ce pixel cette valeur maximale. Lorsque le pixel est sur le pourtour de l'image, on effectue la même transformation mais en ne considérant que les voisins contenus dans l'image.*
- 4. Pour chaque pixel de l'image, on effectue un tirage aléatoire avec trois événements possibles, soit on ne modifie rien avec une probabilité 0.8, soit remplace la valeur de ce pixel par 255 avec une probabilité de 0.1, soit on remplace la valeur de ce pixel par 0 avec une probabilité de 0.1.*



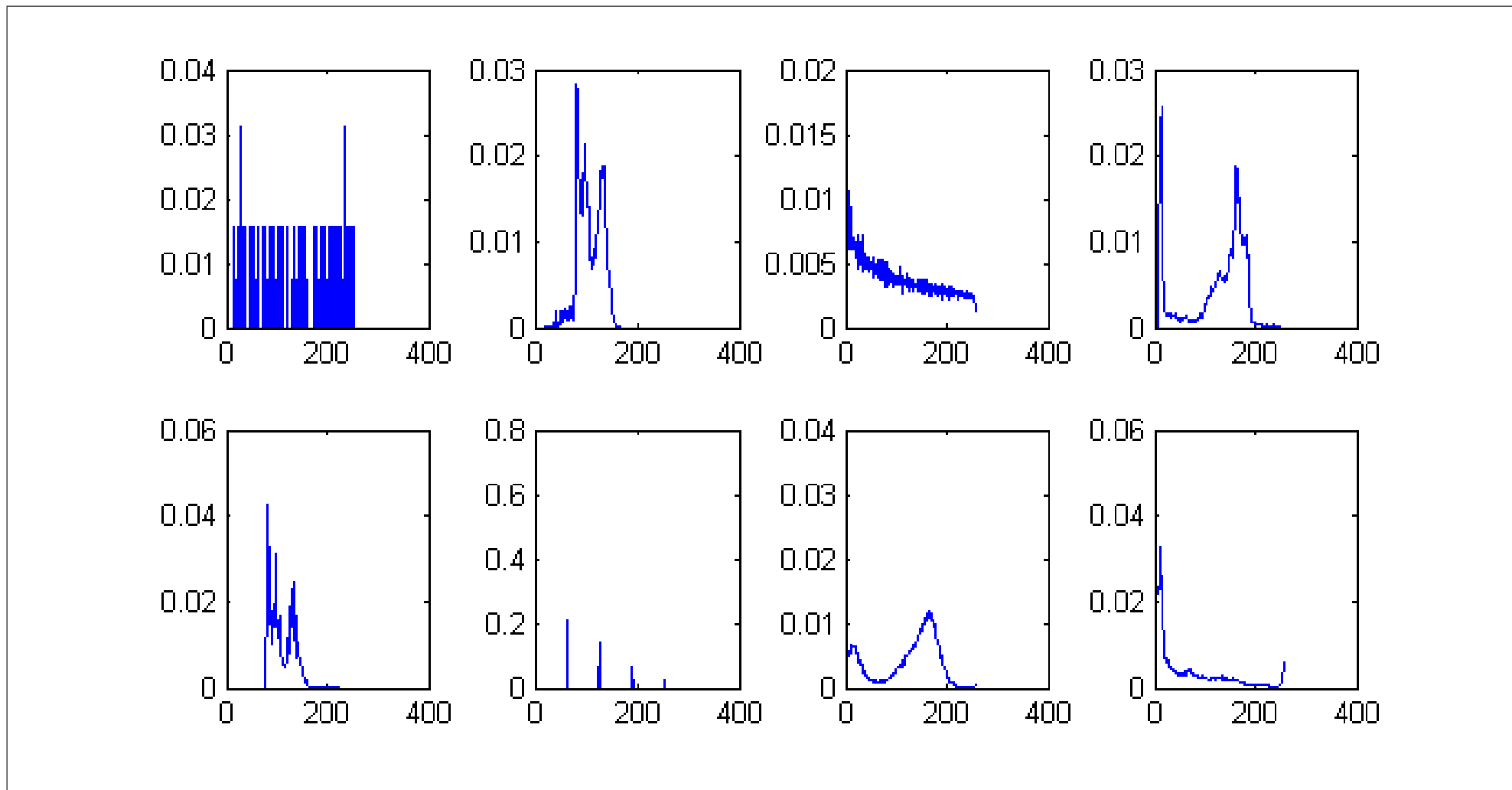


Figure 7: image de l'exercice 17 numérotées en lignes de *a* à *h*.

Exercice 17 (52) *Les histogrammes de la figure 7 correspondent chacun à une des huit images de la figure 6. Retrouvez à quelle image chaque histogramme correspond.*

3.4 Couleur

Exercice 18 (17)

Cet exercice illustre la commande `ind2rgb` exposée dans le polycopié de TP. On considère une image couleur définie par une table de chiffres et une table de couleurs ; en fait chaque chiffre de la première table correspond à une couleur définie par la deuxième table.

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 8 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 5 & 5 & 8 & 8 \\ 6 & 6 & 5 & 2 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (15)$$

la table de couleur est définie par :

$$t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

La première colonne est associée à la couleur rouge, la deuxième colonne est associée à la couleur verte, la troisième colonne est associée à la couleur bleue.

- 1. Ecrivez les trois matrices R, G, B correspondant à cette image couleur.*
- 2. Donnez un nom à chacune des couleurs présentes dans cette image.*
 - La couleur (0, 1, 1) correspond au cyan*
 - La couleur (1, 0, 1) correspond au magenta*
 - La couleur (1, 1, 0) correspond au jaune*
- 3. On forme un image en niveau de gris contenant la composante rouge. Ecrivez cette matrice.*

4. Formez les trois matrices R, G, B en supprimant la composante rouge.

Exercice 19 (54)

On considère ici l'image d'un plateau gris contenant des aubergines noirs, des choux fleurs blancs et des tomates rouges. Trouvez une technique permettant de faire détecter les tomates. Concrètement il s'agit de former une image binaire de même taille que cette image d'un plateau mais où les pixels blancs correspondent aux pixels associés aux tomates rouges et les pixels noirs correspondent à tous les pixels non-associés aux tomates rouges. Il est supposé ici que c'est un ordinateur qui fait le travail et qu'il convient de lui indiquer les tâches à réaliser.

Indication : L'idée générale est de parcourir tous les pixels de l'image du plateau et pour chaque pixel de réaliser un test les valeurs des composantes rouges, vertes et bleues. Lorsque ce test est vérifié, le pixel correspondant sur la nouvelle image est mis à blanc et lorsque ce test n'est pas vérifié, le pixel correspondant sur la nouvelle image est mis à noir. Chaque pixel désigné par ses coordonnées m, n a trois composantes notées respectivement $g_{mn}^R, g_{mn}^V, g_{mn}^B$. On suppose ici que les valeurs de ces composantes sont entre 0 et 1.

3.5 Détection de contour

Exercice 20 (55) *On considère une image noire de taille 201×201 avec en son centre un carré blanc de taille 101×101 . On suppose ici que les valeurs des composantes sont entre 0 et 1, et que la numérotation part de 0, que l'axe associé à l'indice m part d'en haut*

à gauche vers le bas et que l'axe associé à l'indice n part d'en haut à gauche vers la droite. Cette image particulière est notée f_{mn} . La taille de l'image est notée $M \times N$. Sur cette image, on effectue un traitement permettant de trouver en partie des contours. Ce traitement consiste d'abord à appliquer un filtre de masque $\frac{1}{2}[\square, -1]$ puis à prendre la valeur absolue de l'image résultante et enfin à transformer cette valeur absolue en une valeur binaire 0 si la valeur absolue est inférieure strictement à 0.1 et 1 sinon. L'image obtenue avec ce traitement est notée h_{mn} .

1. Montrez que le traitement peut s'écrire sous la forme

$$h_{mn} = \mathbf{1}_{[0.1, +\infty[}(h'_{mn}) \quad \text{où} \quad h'_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} |f_{m,n} - f_{m,n+1}| & \text{si } n < N - 1 \\ \frac{1}{2} |f_{m,N-1}| & \text{sinon} \end{cases} \quad (17)$$

2. Montrez que l'image h_{mn} est

$$h_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{49, 150\} \quad \text{et} \quad m \in \{50, \dots, 150\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

3. Comment décririez-vous cette image ?